ПРАКТИЧЕСКАЯ

АРИѲМЕТИКА.

СОСТАВИЛЪ

П. С. ГУРЬЕВЪ.

КНИГА II:

ВЫСШІЙ КУРСЪ.

3-е изданіе, исправленное и дополненное.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи В. Безобразова и Комп.
(Вас. Остр., 8 линія, № 45.)

1881.

ПОДРОБНЫЙ КОНСПЕКТЪ

ПРЕПОДАВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

ВАЖНЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страницы.	*Строки.*	*Напечатано.*	*Слѣдовало напечатать.*
XII	10	посѣщгели	посѣтители
XXIII	5	катехизисы и	катехизисы,
—	33	заведаніе	заведеніе
XXVI	10	коментарнаго	комментатора
XXVII	31	Жанъ-жакъ	Жанъ-Жакъ
XXXII	31	истощанія	истощеніе
XXXIV	35	ни одного	ни какого

[illegible]
шійся впослѣдствіи столь излюбленнымъ нашими педагогами. Остается только пожелать, чтобы послѣ всѣхъ пережитыхъ нами педагогическихъ перепетій, по крайней мѣрѣ въ будущемъ мы сдѣлались гораздо осторожнѣе въ перениманіи всего чужаго и усвоеніи его себѣ; но не такъ какъ теперь, съ большою ревностію, но безъ большаго разума.

Песталоцци назвалъ свое ученіе *методою*, разумѣя подъ этимъ словомъ новый способъ и вмѣстѣ новый распорядокъ элементарнаго

ПОДРОБНЫЙ КОНСПЕКТЪ
ПРЕПОДАВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

L'homme entend, l'éspèçe est sourde.

Куда *всѣ*, туда и мы.
Новгородская поговорка.

Предварительно сдѣлаемъ общій историческій обзоръ преподаванію Ариѳметики, какъ оно стало пониматься со времени появленія «Ученія о числахъ» Песталоцци. Такой обзоръ важенъ для каждаго изъ молодыхъ учителей, въ особенности недостаточно знакомыхъ съ нѣмецкою учебною литературою. Онъ ознакомитъ ихъ не только съ сущностію такъ-называемой *новой методы*, но и съ измѣненіями, какимъ подвергалась она въ теченіи почти цѣлаго столѣтія, пока не утвердилась въ нашихъ школахъ. Съ другой стороны, это поставитъ ихъ на надлежащую точку сравненія при критической оцѣнкѣ всѣхъ появившихся у насъ и имѣющихъ появиться вновь разнаго рода методъ, въ томъ числѣ и предлагаемаго нами конспекта, который былъ напечатанъ въ первый разъ въ 1857 году, именно въ то время, когда только что сталъ появляться у насъ въ переводѣ Грубе, сдѣлавшійся впослѣдствіи столь излюбленнымъ нашими педагогами. Остается только пожелать, чтобы послѣ всѣхъ пережитыхъ нами педагогическихъ перепетій, по крайней мѣрѣ въ будущемъ мы сдѣлались гораздо осторожнѣе въ перенимании всего чужаго и усвоеніи его себѣ; но не такъ какъ теперь, съ большою ревностію, но безъ большаго разума.

Песталоцци назвалъ свое ученіе *методою*, разумѣя подъ этимъ словомъ новый способъ и вмѣстѣ новый распорядокъ элементарнаго

обученія, основаннаго на «наглядности». Выводя изъ непосредственныхъ наблюденій, что каждый, въ раннемъ возрастѣ, живетъ по преимуществу жизнію внѣшнею, и только самымъ медленнымъ путемъ переходитъ отъ внѣшнихъ, чувственныхъ представленій къ представленіямъ внутреннимъ или понятіямъ, онъ полагалъ, что сообразно съ этимъ должно быть ведено и обученіе. Съ другой стороны утверждая, что въ сферѣ мышленія все зависитъ отъ силы впечатлѣній, онъ совѣтовалъ учителю болѣе всего и прежде всего дѣйствовать на развитіе въ ребенкѣ *способности вниманія* или вниканія. А чтобы развить и изощрить эту способность и чрезъ то постепенно укрѣпить въ ребенкѣ его природную логику, занимающуюся разными *порядками* и *категоріями* мыслей, возбуждаемыхъ извнѣ, совѣтовалъ сосредоточить вниманіе его, хотя бы *съ насиліемъ его терпѣнія*, сперва на одномъ порядкѣ мыслей, потомъ на другомъ, указывая преимущественно на порядки, образующіеся изъ сопоставленія между собою. разныхъ числовыхъ отношеній (послѣдовательные ряды). Онъ былъ увѣренъ, что посредствомъ такихъ именно упражненій въ школѣ, ученики пріучатся съ раннихъ лѣтъ судить потомъ и обо всѣхъ вещахъ съ такою же послѣдоватальностію и быстротою, съ какою они пріучены разсматривать въ послѣдовательныхъ рядахъ комбинаціи разныхъ числовыхъ отношеній. Такимъ образомъ онъ смотрѣлъ на ариѳметику, и преимущественно на ариѳметику, не какъ на положительное и реальное знаніе, необходимое для каждаго въ общежитіи, а какъ на практическую логику. Но хотя онъ и установляетъ для всѣхъ умственныхъ упражненій начало «наглядности», однакожь на дѣлѣ ограничиваетъ эту наглядность, какъ увидимъ ниже, только квадратомъ и нѣсколькими прямыми чертами. Принявъ этотъ квадратъ, и только квадратъ, за исходный пунктъ для всѣхъ своихъ упражненій въ числахъ, онъ пускается потомъ съ дѣтьми въ самыя сухія и сложныя отвлеченія, въ своихъ послѣдовательныхъ рядахъ числовыхъ данныхъ, а потому естественно и самъ того не замѣчая, оставляетъ за собою реальную почву, которую сознавалъ столь важной для всѣхъ изслѣдованій. Слѣдствіемъ всего этого было то, что при самыхъ добрыхъ своихъ намѣреніяхъ, при самомъ искреннемъ желаніи принести пользу возрастающему поколѣнію, онъ и не замѣчалъ, съ какимъ тяжелымъ, почти сверхъестественнымъ трудомъ должны были работать дѣти, чтобы только не отстать за нимъ въ его идеализаціяхъ. Правда, послѣ трудныхъ испытаній, дѣти рѣшали въ умѣ такія сложныя ариѳметическія задачи, что удивляли даже ком-

петентныхъ посѣтителей и всѣмъ казалось, что они рѣшаютъ ихъ легко и какъ бы шутя; но правда и то, что тѣже самыя дѣти, которыя такъ ловко и бойко справлялись съ головными счетами (Kopfrechnen), впослѣдствіи, и часто очень скоро, когда переходили отъ изустныхъ исчисленій къ цифровымъ, путались и затруднялись даже въ самыхъ простыхъ выкладкахъ. Песталоцци самъ нѣсколько разъ повторяетъ, что успѣхъ всего дѣла обученія обусловливается силою вниманія, насколько дѣти въ состояніи приложить его къ изучаемому ими предмету. Однако возможно ли такъ насиловать эту способность, притомъ долго и исключительно, оставляя въ тоже время всѣ прочія душевныя способности ребенка какъ бы въ усыпленіи? Не много надо сдѣлать наблюденій надъ ребенкомъ, чтобъ удостовѣриться, что онъ настолько въ состояніи сосредоточить свое вниманіе на какомъ-нибудь предметѣ или на цѣломъ рядѣ однородныхъ предметовъ, насколько бываетъ побуждаемъ къ тому въ видахъ собственнаго своего интереса и сколько достаетъ у него для этого силъ, душевныхъ и тѣлесныхъ. Тутъ онъ также скоро устаетъ по причинѣ неокрѣплости своего организма, какъ и отъ всякой другой работы. Природная пытливость и любознательность, новость предмета, особенное влеченіе къ нему, личный интересъ, при постоянномъ вліяніи на него свободной, ничѣмъ не стѣсняемой воли — вотъ что только дѣйствительно можетъ иногда заставить даже малаго ребенка углубить свое «вниманіе» на разсматриваніи одного и того же предмета или цѣлаго ряда, или порядка сродственныхъ между собою предметовъ; но, только, по большей части, на короткіе промежутки времени. И для педагога чрезвычайно важно замѣчать тѣ моменты, когда энергія въ работѣ ребенка начинаетъ ослабѣвать. Тутъ тогда бываетъ нужно не только дать ему отдыхъ, но даже вырвать его, такъ сказать, изъ колеи спеціальныхъ одностороннихъ упражненій, и дать ему совершенно другаго рода занятія. Иначе значило бы только насиловать его въ самыхъ начальныхъ росткахъ проявленія его самостоятельности, водить его на помочахъ, чтобы сдѣлать наконецъ изъ него куклу, автомата. Такая свѣтлая, любящая душа, каковъ былъ Песталоцци, еще могъ бы во-время исправить такой искуственный, а въ существѣ мертвящій способъ обученія, что отчасти и самъ потомъ сознавалъ, дополняя свои ариѳметическія уроки упражненіями въ геометріи, если бъ могъ и успѣлъ провести свое ученіе чрезъ всѣ возрасты учащихся, чего однакожь не случилось. Но когда вмѣсто него представимъ себѣ учителя педанта, холоднаго, черстваго, ка-

кихъ бываетъ не мало, то легко можемъ себѣ представить, къ какимъ печальнымъ послѣдствіямъ должна была приводить такая метода.

Все это, о чемъ мы теперь говоримъ, составляетъ самую дурную сторону методы Песталоцци, хотя, къ сожалѣнію, она-то, эта сторона, *больше* всего и полюбилась новѣйшимъ педагогамъ, особенно нашимъ — русскимъ, привыкшимъ пѣть съ чужаго голоса, всегда только подражая и ни надъ чѣмъ не задумываясь, лишь бы была для нихъ новинка.

Первымъ условіемъ методы было начинать обученіе ребенка съ самыхъ простыхъ мыслей, вполнѣ доступныхъ его разумѣнію. Должно начинать съ самаго *легчайшаго*, училъ Песталоцци, съ ближайшаго къ дѣтямъ, что они непосредственно могутъ ощущать своими чувствами, и только длиннымъ рядомъ представленій, всегда наглядныхъ и соприкасающихся между собою, доводить до сознанія *труднаго*, отвлеченнаго. Онъ всего больше предостерегалъ — не торопиться. Прежде чѣмъ ребенокъ перейдетъ отъ одного представленія къ другому, отъ одной числовой комбинаціи къ другой, на первомъ должно удержать его вниманіе настолько, чтобы онъ вполнѣ его понялъ, изучивъ его во всѣхъ его частяхъ, во всѣхъ подробностяхъ, такъ чтобы *нигдѣ* и ни *въ чемъ* не было ни промежутковъ, ни скачковъ, чтобы такимъ образомъ знаніе вещи «*повсюду соединялось съ точнымъ смысломъ слова, которымъ эта вещь обозначается*».

Задавшись такою задачею — вести *систематически*, шагъ за шагомъ, отъ точки до точки, обученіе дѣтей даже самаго ранняго возраста, напр. пяти, шести лѣтъ, и не будучи въ состояніи найти для такого ранняго возраста пригодныхъ наставниковъ, онъ возъимѣлъ благую мысль — предоставить по крайней мѣрѣ этотъ первоначальный трудъ матерямъ семействъ. Казалось бы этимъ слѣдовало и покончить съ раннимъ возрастомъ, недоступнымъ школьному образованію, и предоставить всецѣло малолѣтнимъ дѣтямъ развиваться у семейнаго очага, подъ кроткимъ и всегда любящимъ взоромъ матери; но нѣтъ! онъ и тутъ пожелалъ оставить слѣды своей теоріи. Для первоначальнаго предшкольнаго образованія онъ написалъ книгу «Mutter Buch», которая въ первой четверти настоящаго столѣтія была распространена повсюду, вмѣстѣ съ филантропіею. Песталоцци оправдываетъ по крайней мѣрѣ то, что при составленіи своей книги онъ имѣлъ въ виду преимущественно дѣтей самыхъ бѣдныхъ, самаго низшаго класса, даже брошенныхъ своими родителями на произволъ судьбы, дѣтей до того неразвитыхъ, что они не умѣли даже отли-

чить правой руки отъ лѣвой, сосчитать безъ ошибки число своихъ пальцевъ и проч., что дѣйствительно иногда случается видѣть.

Положивъ первую ступень своей образовательной системы въ книгѣ «Mutter Buch», Песталоцци перешелъ ко второй ступени, которую озаглавилъ такъ: *«Наглядное обученіе о содержаніи чиселъ»*. Этою ступенью онъ собственно начинаетъ и оканчиваетъ свою методу въ школѣ, потому что въ ней высказывается вся ея сущность. Остановимся на ней подолѣе. Въ ней дѣйствительно вложено было новое начало, которое съ самыхъ первыхъ годовъ нынѣшняго столѣтія совершенно измѣнило элементарное школьное обученіе, сперва въ Германіи, а потомъ и въ другихъ странахъ.

Ученіе ариѳметикѣ, говоритъ Песталоцци, должно начинаться съ *единицы*, какъ самаго простаго элемента чиселъ, и постепенно доходить до самыхъ сложныхъ числовыхъ комбинацій, чтобы учащійся могъ получить наконецъ совершенно ясное и подробное понятіе о *величинѣ* или количествѣ. «Тутъ не правила непонятныя, говоритъ одинъ изъ объяснителей и послѣдователей его, приняты за основаніе дѣйствій ребенка, но полнѣйшая очевидность (наглядность), какъ бы осязательность числовыхъ отношеній, въ которой для воображенія и созерцанія ребенка представляется полный просторъ». Какъ скоро ребенокъ начинаетъ упражнять свои чувства, продолжаетъ онъ, глазамъ его представляется цѣлая куча предметовъ, подлежащихъ исчисленію, и порождаетъ въ немъ понятіе о *единицѣ* и *множествѣ*. Уже въ Mutter Buch онъ получилъ первыя представленія объ этомъ. Мать указывая ему, что у него *одинъ* глазъ и еще *одинъ*, значитъ *два* глаза, *одно* ухо и еще *одно* — два уха, даетъ ему уже первые уроки въ ариѳметикѣ. Но на этомъ остановиться нельзя. То, что ребенокъ продѣлывалъ съ отдѣльными единицами, онъ долженъ продѣлывать съ разными числами, чтобы получить наконецъ полное и ясное понятіе о числѣ. Путь для этого одинъ и тотъ же — *«наглядность»*. Но прежде чѣмъ отдѣлить отъ предметовъ понятіе объ ихъ числѣ, надобно, по выраженію Песталоцци, *«видѣть число тѣсно соединеннымъ съ предметами»*. Уже въ первоначальныхъ наглядныхъ упражненіяхъ по Mutter Buch, мать не должна ограничиваться только частями тѣла ребенка, какъ-то: ушей, глазъ, пальцевъ, суставовъ и проч., но упражнять его точно также въ счетѣ камышковъ, орѣховъ, досчечекъ и проч. Она не скажетъ ему, положивъ на столъ одинъ орѣхъ: вотъ *одинъ*, а скажетъ: вотъ *одинъ орѣхъ*; не скажетъ: вотъ два, а скажетъ: вотъ *два раза одинъ орѣхъ* и т. д., прибавляя вся-

кій разъ къ числу и слова тѣхъ видимыхъ предметовъ, которыя это число изображаетъ. Когда ребенокъ пріучится такъ составлять числа, то не замедлитъ замѣтить, что слова: *одинъ*, *два*, *три* и проч., соединяемыя съ предметами: камышки, орѣхи и проч.. остаются непремѣнными, а самые предметы измѣняются. Такимъ образомъ онъ научится отличать понятіе «о числѣ» отъ самыхъ предметовъ. Песталоцци считаетъ такія упражненія достаточными, чтобы ребенокъ, наконецъ, пріобрѣлъ отвлеченное понятіе о количествѣ, или, какъ онъ выражается: *дошелъ до чистаго и точнаго чувствованія о томъ*, что *больше* и что *меньше*, независимо отъ сущности видимыхъ предметовъ».

«Противъ этого могутъ замѣтить, продолжаетъ тотъ же комментаторъ его методы, что ребенокъ и безъ всѣхъ этихъ мелочныхъ способовъ (казалось бы такъ), чрезъ одно частое повтореніе: одинъ, два, три и проч., можетъ дойти до такого сознанія, особенно если много будетъ упражняться въ перечисленіи разныхъ порядковъ чиселъ. Но что же онъ тутъ понимаетъ? При указаніи, напр. на число 9 въ натуральномъ ряду чиселъ, ребенокъ, можетъ быть, вспомнитъ, что 9 слѣдуетъ за 8, или предшествуетъ числу 10, и — только. Но этого мало. Ребенокъ, веденный по методѣ Песталоцци, пріобрѣтаетъ ту важную выгоду, что *получаетъ надежный фундаментъ и такую ясность понятія о числѣ*, какой не достигаетъ множество обучавшихся *ариѳметикѣ во всю свою жизнь* (?!)».

Положивъ такой *прочный*, какъ ему казалось, фундаментъ еще въ своей «Mutter Buch», Песталоцци обнародываетъ свою книгу «Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse», въ которой въ подробности излагаетъ свое ученіе о числахъ. Для этого онъ сочиняетъ три таблицы, которыя постоянно держитъ предъ глазами учениковъ, принимая ихъ за единственно вспомогательныя, наглядныя средства для разъясненія себѣ всѣхъ возможныхъ комбинацій чиселъ (отъ 1 до 100), простыхъ и дробныхъ. Достаточно взглянуть на эти таблицы, помѣщенныя въ концѣ конспекта, въ основаніе которыхъ положенъ квадратъ съ различными его подраздѣленіями на равныя части, чтобы тотчасъ понять какого рода различныя упражненія можно по нимъ произвести. Таблицы эти чертились въ большихъ размѣрахъ, чтобы могли быть видимы всему классу и, для прочности, обыкновенно наклеивались на картонъ и покрывались лакомъ, пріобрѣтая такимъ образомъ названіе стѣнныхъ таблицъ. Это единственныя наглядныя средства, на которыя онъ указываетъ и которыя признаетъ

достаточными для всѣхъ своихъ упражненій съ дѣтьми въ исчисленіи.

Изъ тѣхъ извлеченій, которыя теперь представимъ, наши читатели, мы въ томъ увѣрены, достаточно поймутъ духъ, характеръ и содержаніе методы Песталоцци, особенно если постоянно будутъ имѣть на виду составленныя имъ таблицы.

Таблица 1-я (таблица единицъ).

Сначала учитель, обозначая указкою первый продольный рядъ клѣтокъ (квадратовъ), говоритъ: вотъ это рядъ одинакихъ цѣлыхъ единицъ. Потомъ, переходя къ поперечному ряду клѣтокъ, сверху внизъ, продолжаетъ: здѣсь *два раза одинъ*, *три раза одинъ* и т. д. до послѣдней клѣтки, гдѣ означено: *десять разъ одинъ*.

Но прежде чѣмъ перейти къ третьему ряду, Пестолоцци совѣтуетъ нѣсколько остановиться на этомъ второмъ ряду, чтобы тутъ же сообщить дѣтямъ начальное понятіе о дроби. Сравнивая оба ряда вмѣстѣ, учитель говоритъ: вотъ *половина двухъ*; — *два раза половина двухъ или одинъ разъ два*; — *одинъ разъ два и половина отъ двухъ*; — *два раза два*; — *два раза два и половина отъ двухъ*; — *три раза два* и т. д.

Тоже продѣлываетъ далѣе по групамъ *троекъ*, *четверокъ*, *пятковъ* и проч., строго наблюдая чтобы дѣти постоянно и зорко всматривались въ таблицу.

Когда такимъ образомъ и послѣдовательно по всѣмъ рядамъ и клѣткамъ, упражненія будутъ проведены, тогда учитель начинаетъ спрашивать вразбивку. Указывая, напр. на групу *пять черточекъ*, спрашиваетъ: сколько тутъ разъ *два*? Ученикъ отвѣчаетъ: два раза два и половина отъ двухъ. Тоже продѣлываетъ и со всѣми пройденными рядами, не упуская ничего и только отъ времени до времени останавливаясь на подходящихъ сюда частныхъ вопросахъ и задачахъ.

Вотъ примѣръ болѣе сложный, когда ученики усвоили себѣ обстоятельно все, что съ ними было пройдено.

Задача. Восемь разъ три и два раза третья часть трехъ, сколько разъ по четыре?

Отвѣтъ. Шесть разъ по четыре и два раза одна четверть четырехъ.

Доказательство. *Одинъ* разъ *три* все тоже, что *три* раза *одинъ*; *два* раза *три* — *шесть* разъ *одинъ*; *три* раза *три* — *девять* разъ *одинъ*; *четыре* раза *три* — *двѣнадцать* разъ *одинъ*; *пять* разъ *три* — *пятнадцать* разъ *одинъ*; *шесть* разъ *три* — *восемнадцать* разъ *одинъ*; *семь* разъ *три* — *двадцать одинъ* разъ *одинъ*; *восемь* разъ *три* — *двадцать четыре* разъ *одинъ*. Теперь далѣе: *третья* часть *трехъ* все

тоже, что *одинъ; два* раза *третья* часть *трехъ — два* раза *одинъ*; *двадцать четыре* разъ *одинъ* и *два* раза *одинъ — двадцать шесть* разъ *одинъ*. Слѣдовательно, *двадцать шесть* разъ *одинъ* все тоже, что *восемь* разъ *три* и *два* раза *третья* часть *трехъ*. Наконецъ, $1 \times 4 = 4 \times 1$;*) $2 \times 4 = 8 \times 1$; $3 \times 4 = 12 \times 1$; $4 \times 4 = 16 \times 1$; $5 \times 4 = 20 \times 1$; $6 \times 4 = 24 \times 1$; $4 \times {}^1/_4\ 4 = 4 \times 1$; $2 \times {}^1/_4\ 4 = 2 \times 1$;

$24 \times 1 + 2 \times 1 = 26 \times 1$; поэтому $26 \times 1 = 6 \times 4 + 2 \times {}^1/_4\ 4$.

Песталоцци настаиваетъ на томъ, чтобы въ началѣ, пока ученики не пріобрѣли настоящаго навыка исчислять по таблицѣ, учитель непремѣнно требовалъ отъ нихъ, чтобы они давали такія подробныя доказательства, какъ показано въ изложенномъ здѣсь примѣрѣ. Чрезъ это только, по мнѣнію его, учитель въ состояніи удостовѣриться, что ученикъ *понимаетъ* все, что дѣлаетъ. Надобно, училъ онъ, *постоянно напрягать вниманіе* ученика, чтобы онъ, такъ-сказать, *нечувствительно* доходилъ отъ наглядности и напряженнаго вниманія до *силы соображать* и *мыслить* — въ чемъ и состоитъ цѣль *методы*.

Примѣръ краткаго рѣшенія.

Вопросъ. $6 \times 7 + 6 \times {}^1/_7$ сколько разъ 1?

Отвѣтъ. $6 \times 7 + 6 \times {}^1/_7\ 7 = 48 \times 1$.

Вопросъ. Почему?

Отвѣтъ. $1 \times 7 = 7 \times 1$; $6 \times 7 = 42 \times 1$; ${}^1/_7 7 = 1$; $6 \times {}^1/_7 7 = 6 \times 1$; $42 \times 1 + 6 \times 1 = 48 \times 1$.

За этимъ слѣдуетъ упражненіе, въ которомъ *единица* разсматривается какъ часть или дробь какого-либо другаго числа.

Далѣе по той же таблицѣ идетъ рядъ упражненій, изъ которыхъ учащійся получаетъ болѣе ясное понятіе о дробяхъ, но и то съ малою дозою приращенія. На *единицу* указываютъ какъ на *часть* какого-либо числа. Такъ напр. единица составляетъ *половину* отъ *двухъ*, ${}^1/_3$ отъ 3, ${}^1/_4$ отъ 4 и т. д. Затѣмъ идутъ обратно: $3 \times 1 = 1 \times 2 + {}^1/_2 2$; $5 \times 1 = 2 \times 2 + {}^1/_5\ 5$ и т. д. Такъ проходятся всѣ ряды до послѣдняго и безъ пропусковъ. Сюда относятся задачи, подобныя слѣдующей:

*) Для краткости, мы будемъ здѣсь употреблять цифры, хотя въ головныхъ счетахъ (Kopfrechnen) методы Песталоцци объ нихъ и помину нѣтъ. Онъ ихъ не признавалъ за такіе же реальные знаки, помогающіе уму въ его комбинаціяхъ, какими считалъ квадраты, черточки и проч.

Задача. 37 × 1 сколько разъ 5?

Отвѣтъ. 37 × 1 = 7 × 5 + 2 × 1/5 5.

Ученикъ это доказываетъ по клѣткамъ пятаго ряда. 35 × 1 = = 7 × 5, а 37 × 1 все то же, что семь разъ пять и еще два раза пятая часть пяти.

Такого рода упражненія, говоритъ Песталоцци, не только сообщаютъ ученику начальное понятіе о *дробяхъ*, но еще ведутъ его къ ясному и сознательному изученію Пиѳагоровой таблицы, — этого камня преткновенія для прежнихъ школъ.

Введеніе дробей въ самыя начальныя упражненія надъ числами есть дѣйствительно заслуга Песталоцци, которую, къ сожалѣнію, и до сихъ поръ не понимаютъ многіе педагоги. За это и насъ упрекали, зачѣмъ мы уже въ первомъ отдѣлѣ нашего курса 1-й книги, гдѣ идетъ дѣло только о числахъ отъ 1 до 10, знакомимъ учащихся съ дробями. *) По ихъ мнѣнію, о дробяхъ не слѣдуетъ говорить прежде, пока ученики не ознакомятся съ правилами дѣленія, такъ какъ, по ихъ понятіямъ, дробь происходитъ отъ раздѣленія меньшаго числа на бо̀льшее, а иначе о ней и нельзя получить яснаго представленія. По нашему же мнѣнію, напротивъ, какъ понималъ и Песталоцци, понятіе о дроби также извлекается изъ *нагляднаго представленія*, какъ понятіе о единицѣ и о каждомъ числѣ. Каждое малое дитя понимаетъ уже, что̀ *часть* и что̀ цѣлое. Мать говоритъ своимъ дѣтямъ: вотъ вамъ двоимъ яблоко, половину возьми себѣ, а другую отдай сестрѣ. Но не проходитъ и нѣсколько минутъ, какъ дѣвочка бѣжитъ къ матери и въ слезахъ. «Ты велѣла Володѣ раздѣлить со мною яблоко пополамъ, онъ взялъ себѣ большую часть яблока, а мнѣ далъ вотъ сколько!» Не значитъ ли, что эта дѣвочка имѣетъ уже понятіе не только о равныхъ частяхъ цѣлаго, но и о неравныхъ? Но какъ, позвольте спросить, понятіе о неравныхъ частяхъ цѣлаго примѣнить къ понятію частнаго, происшедшаго отъ раздѣленія ме́ньшаго числа на бо̀льшее? Разумѣется нельзя. *) Будемъ

---

*) «Голосъ», № 86, марта 1880 г.

*) Наши новѣйшіе педагоги такъ горячо отстаиваютъ предвзятые ими принципы, во-первыхъ, по недостатку собственной наблюдательности и по привычкѣ пѣть съ чужаго голоса; во-вторыхъ, по боязни прогнѣвить ученый ареопагъ, который еще недавно былъ такъ грозенъ, что предавалъ остракизму всякій учебникъ, въ которомъ хоть на іоту было отступлено отъ однажды на всегда начертанной и обнародованной министерствомъ народнаго просвѣщенія программы. Въ программѣ же этой, едва ли не съ временъ Магницкаго и Рунича, относительно ариѳметики стоитъ

продолжать. Далѣе идетъ цѣлый рядъ упражненій, имѣющихъ предметомъ превращать или видоизмѣнять одни произведенія въ другихъ, и все по той же первой таблицѣ. Такъ, напр. $3 \times 2 = 6 \times 1$, или обратно: *шесть разъ одинъ равно два раза тремъ*; шесть разъ *четыре* равно три раза *семь* и *три разъ седьмая часть семи*. Постепенно вопросы усложняются. Вопросъ: *десять разъ четвертая* часть *восьми* сколько разъ 1? *Отвѣтъ*. $^1/_48$ составляетъ два раза 1; $10 \times {}^1/_48 = 10 \times 2$ или 20 разъ 1.

Вопросъ: $8 \times {}^1/_763$ сколько разъ 1?

Отвѣтъ. $^1/_763 = 9$; $8 \times {}^1/_763 = 8 \times 9 = 72$.

Потомъ идутъ такія упражненія, въ которыхъ сравниваются два числа въ отношеніи взаимной ихъ величины. Напр. 2 составляютъ какую

слѣдующее: Нумерація (слѣдуетъ всю выложить до квадрилліоновъ и далѣе) — четыре правила простыхъ чиселъ — четыре правила именованныхъ чиселъ — простыя дроби — десятичныя дроби — пропорціи и тройныя правила. При этомъ строго наблюдалось, чтобъ ученикъ не перескакивалъ отъ одного правила къ другому, пока не усвоитъ себѣ хорошо предыдущаго. Отъ учениковъ, оставившихъ школу прежде окончанія курса, случалось слышать такіе отвѣты: «я только дошелъ до дѣленія, котораго не удалось изучить». Или: «на дѣленіи дробей я остановился; учитель оставилъ это правило до слѣдующихъ уроковъ, а тутъ я и вышелъ изъ школы» и т. п. Концентрацій въ изложеніи, какъ это дѣлалъ Песталоцци и его послѣдователи, вслѣдствіе сродства идей, отнюдь не допускается. Это — молъ ересь и противорѣчитъ *системѣ*. А если спросите: что такое система само по себѣ и сколько удовлетворяетъ она законамъ логики? то на это у нихъ всегда есть наготовѣ обходный отвѣтъ: система есть произведеніе великихъ умовъ, появлявшихся въ теченіи столѣтій, произведеніе, подкрѣпленное собственными нашими авторитетами. Вотъ и все. Но любопытно взглянуть хоть на одинъ какой-либо учебникъ ариѳметики, излюбленный ученымъ комитетомъ министерства народнаго просвѣщенія, чтобъ удостовѣриться, какъ тамъ излагалось ученіе о дробяхъ, согласно офиціальной программѣ. Возьмемъ на удачу «Руководство къ Ариѳметикѣ, академика В. Я. Буняковскаго,» одобренное для употребленія въ гимназіяхъ. Развернувъ 54-ю стр., читаемъ: «Такое изображеніе слѣдствія (!) дѣленія меньшаго числа на бо̀льшее называется *правильною* или простою дробью.» И далѣе, на стр. 55-й: «Слѣдствіе дѣленія бо̀льшаго числа на меньшее, написанное въ видѣ дроби, какъ напр., $^{11}/_5$ называется *неправильною* дробью. По отдѣленіи же частнаго отъ неправильной дроби, она принимаетъ названіе *смѣшанной* (не смѣшной ли?); такъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, въ которомъ $^{11}/_5 = 2^1/_5$, $2^1/_5$ будетъ *смѣшанная дробь*.» Кажется такія выраженія называются *смѣшанными числами*, а ужъ никакъ не смѣшанными дробями. Но если возьмемъ, для примѣра, дробь $^{10}/_5$ и отдѣлимъ въ ней частное два, то что станется тогда съ этою смѣшанною дробью? Куда она дѣнется? — По предложенному опредѣленію, безчисленное множество чиселъ, напр. $1023^1/_3$, $20495^3/_4$ и проч. все суть смѣшанныя дроби? — И все это сообщается гимназистамъ 11 — 12 лѣтняго возраста!

часть отъ 4, 6, 8 и т. д. Или: отъ какого числа 2 составляетъ *половину*, *треть*, *четверть* и проч. Или: сколько разъ *четыре единицы* содержатъ въ себѣ *седьмую часть четырнадцати единицъ*, и проч.

Одинъ разъ 3 составляетъ *половину* отъ 2 разъ 3 или отъ 6 × 1, и т. д. по всѣмъ рядамъ, безъ пропусковъ, до послѣдняго: 1 разъ 10 составляетъ третью часть отъ 3 разъ 10 или отъ 30 и проч. Затѣмъ слѣдуютъ *пятыя*, *шестыя* и т. д. части.

Когда всѣ эти упражненія будутъ пройдены надлежащимъ образомъ (подай Богъ терпѣнія дѣтямъ!), тогда, какъ завѣряли, дѣти легко усвоятъ себѣ понятіе о пропорціи, упражняясь въ слѣдующихъ рядахъ : 1 относится къ 4, какъ 3 къ 6 и т. д. Или 4 : 16 такъ какъ 9 : 36, 10 къ 40 и проч. Продѣлывается все это съ 2, 3 4, 5 и т. д. единицами до 10.

Вскорѣ однакожь убѣдились въ школѣ Песталоцци, что для нагляднаго представленія «*пропорціи*» недостаточно употреблять сочиненныя имъ таблицы: ученики сбивались, путались. Ученикъ Песталоцци и впослѣдствіи лучшій сотрудникъ его по школѣ, бывшій сельскій учитель Шмидъ, при объясненіи пропорцій сталъ уже употреблять линіи.

Слѣдующія за этимъ вторая и третья таблицы служили основаніемъ, какъ *налядныя представленія*, для дальнѣйшаго изученія дробей, имѣющихъ какъ одинакихъ, такъ и различныхъ знаменателей. Прослѣдить за каждымъ изъ упражненій, сюда относящихся, которыя также располагаются послѣдовательными рядами, нѣтъ особой надобности послѣ всего нами сказаннаго. Ограничимся только нѣсколькими задачами, какъ указаніемъ на результаты, получаемые отъ этихъ, какъ видно, весьма скучныхъ и утомительныхъ для дѣтей упражненій.

Задача. Пять половинъ сколько составляетъ цѣлыхъ?

Отвѣтъ. 2 ц. и половина цѣлаго.

Задача. 4 ц. + $^1/_2$ ц. сколько разъ содержатъ въ себѣ *три половины* такого же цѣлаго?

Отвѣтъ. 3 раза $^3/_2$; потому что 4 ц. и $^1/_2$ ц = $^9/_2$, а $^9/_2$ все то же, что три раза три половины.

Задача. 9 ц. + 2 × $^1/_3$ ц. сколько разъ содержитъ въ себѣ *семь третей?*

Отвѣтъ. 4 раза *семь третей* и *седьмую* часть *семи третей.*

Доказательство (третій рядъ таблицы) 9 ц. и 2 × $^1/_3$ ц. все тоже,

что 29 третей; а $^{29}/_{3}$ все тоже, что 4 раза $^{7}/_{3}$ и еще одна седьмая семи третей.

Задача. Что получится, если взять 12 разъ половину отъ 4 ц.?

Отвѣтъ. 24.

Задача. Къ какому числу цѣлыхъ относятся 7 ц. и $^{2}/_{9}$ ц., когда это отношеніе тоже, что отношеніе 3 ц. + $^{5}/_{9}$ къ 32?

Отвѣтъ. 7 ц. и $^{1}/_{9}$ ц. относятся къ 65 точно также, какъ $3^{5}/_{9}$ ц. относятся къ 32.

и т. д.

Когда удивленные такими успѣхами посѣтители, которыхъ во множествѣ стекалось, въ концѣ прошедшаго и началѣ нынѣшняго столѣтія, въ заведеніе Песталоцци въ Бертудѣ, въ маленькомъ городкѣ швейцарскаго кантона Во, замѣчали, что ученики такъ хорошо отвѣчаютъ быть можетъ потому, что предлагаемыя имъ задачи прямо вытекаютъ изъ упражненій по таблицамъ; тогда и онъ и его сотрудники, чтобы убѣдить невѣрующихъ, задавали ученикамъ вотъ какія задачи.

Задача. У меня 9 копѣекъ, а у товарища моего 15 коп. Какая часть его денегъ равняется моимъ деньгамъ?

Отвѣтъ. Три пятыя; потому что 9 разъ 1 равно 3 раза 3, и $15 \times 1 = 5 \times 3$. 3×3 составляютъ 3 раза пятую часть пяти, взятыхъ три раза.

Задача. У одного мальчика было въ карманѣ 27 орѣховъ; изъ нихъ онъ растерялъ дорогою $^{2}/_{3}$ всего числа орѣховъ. Оставшееся у него въ карманѣ число орѣховъ составляетъ $^{3}/_{8}$ отъ того числа орѣховъ, какое осталось у него дома. Какое это число?

Отвѣтъ. 24. Онъ потерялъ на дорогѣ $^{2}/_{3}$ числа орѣховъ, значитъ у него осталось въ карманѣ 3×3 или 9 орѣховъ. Потерянные 9 орѣховъ составляютъ $^{3}/_{8}$ отъ оставшихся дома, значитъ на *одну восьмую* приходится 3, а все число или восемь восьмыхъ, составляетъ 24 орѣха.

Задача. Если 5 фунтовъ вишней стоютъ 15 к., то что будутъ стоить 9 фунтовъ?

Отвѣтъ. 27 копѣекъ; потому что 5 относится къ 15 или къ 3×5, какъ 9 относится къ 3×9 или 27.

Задача. Сколько приходится получить работнику за 24 дня работы, когда за 16 дней такой же работы ему было дано 28 руб.?

Отвѣтъ. 42.

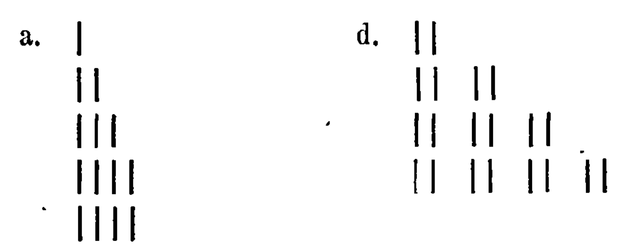
16 дней составляютъ 2 × 8 дней; 24 дня = 3 раза 8 д.; 2 раза 8 все равно, что *два раза третья* часть 3-хъ разъ 8; 28 д. = 2 × 14 дн., а 2 × 14 равно 2 раза третьей части 3 × 14, или 42.

Посѣтители задавали еще сложнѣе этихъ задачъ изъ всѣхъ правилъ ариѳметики, и получали также удовлетворительные отвѣты. Нѣкто Шаванъ, членъ Большаго Совѣта кантона Во, по порученію этого совѣта нѣсколько разъ посѣщалъ Бертудское заведеніе Песталоцци, въ самомъ началѣ нынѣшнито столѣтія, и написалъ цѣлую книгу изъ своихъ отчетовъ, которая была издана въ 1805 г. Онъ утверждаетъ, что такія задачи рѣшали мальчики 8—12 лѣтъ. Это, большею частію, были дѣти, принадлежавшія къ крестьянскому сословію, часто бѣдныхъ, неимущихъ родителей и даже круглыя сироты. Что Песталоцци посвящалъ всю свою благочестивую жизнь на пользу народа, то не подлежитъ ни малѣйшему сомнѣнію; хотя потомъ, когда слава объ его заведеніи стала распространяться повсюду, къ нему стали стекаться не только дѣти, но и взрослые молодые люди разныхъ сословій и націй. *)

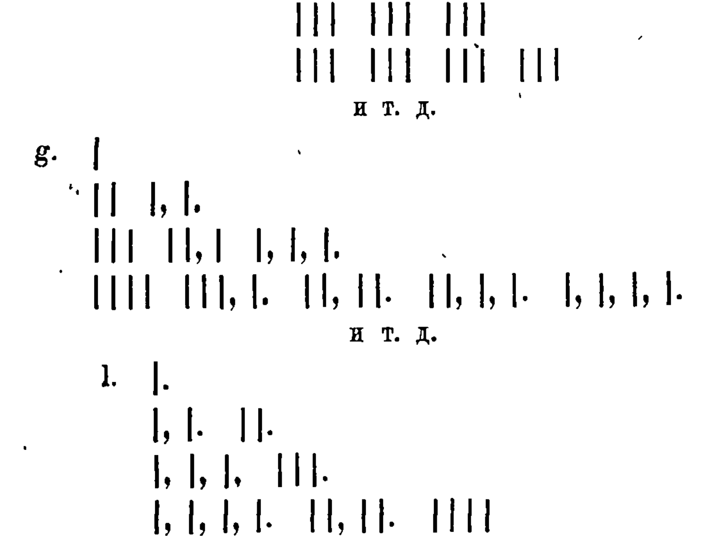
Мы не станемъ болѣе продолжать дѣлать выписки, полагая, что и тѣхъ, которыя привели, весьма достаточно, чтобы получить надлежащее понятіе о «*наглядной* методѣ» Песталоцци. Лучшимъ толкователемъ и объяснителемъ ея былъ Іосифъ Шмидъ, сначала сельскій учитель, а потомъ самый близкій и ревностный сотрудникъ Песталоцци. Еще будучи у него въ Бертудѣ (въ 1800 г.), онъ составилъ книгу, озаглавленную «Die Elemente der Zahl als Fundament der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen,» напечатанную потомъ въ

*) Такъ отъ нашего Министерства Народнаго Просвѣщенія было послано въ двадцатыхъ годахъ пятеро молодыхъ людей, окончившихъ курсъ въ гимназіи: А. Г. Ободовскій, Ѳ. И. Буссе, М. М. Тимаевъ, Богословскій и Свенске. Первые трое избрали себѣ педагогическую карьеру, Богословскій былъ докторомъ. А. Г. Ободовскій много внесъ новаго въ нашу тогдашнюю, скудную педагогическую жизнь. Но удивительно, что министерство только одного изъ нихъ (Ѳ. И. Буссе) навсегда закрѣпило за собою. Онъ издалъ нѣсколько математическихъ учебниковъ, но дотого очуренныхъ министерскою *неизмѣнною системою*, что лишенъ былъ всякой возможности провести методу Песталоцци въ томъ видѣ, сколько бы желалъ и сколько самъ понималъ, изучивъ ее еще въ Швейцаріи. Ему приказано было, чтобы руководство было написано по извѣстной системѣ, на извѣстныхъ правилахъ, и еслибъ онъ воспротивился, то книга никогда не была бы принята для употребленія въ уѣздныхъ училищахъ и гимназіяхъ. Ѳ. И. самъ говорилъ мнѣ, что онъ долженъ былъ нѣсколько разъ совершенно передѣлывать свою рукопись, чтобы она удостоилась наконецъ одобренія министерства.

Гельдельбергѣ въ 1805 г. Въ ней содержатся изустныя упражненія въ исчисленіи, доведенныя до числа 1000. Цѣль одна и таже — всестороннее разсмотрѣніе первоначальныхъ чиселъ, независимо отъ условныхъ знаковъ, ихъ изображающихъ, каковы суть цифры. Но для *наглядныхъ представленій* онъ не ограничивается уже однимъ квадратомъ и его частями, сознаетъ, что нельзя такъ жестоко напрягать *вниманіе* ребенка, чтобъ онъ былъ въ состояніи изъ одного этого нагляднаго предмета выводить длинные послѣдовательные ряды различныхъ числовыхъ отношеній, какъ это требовалъ Песталоцци. Для «наглядности,» онъ беретъ разныя черточки, линіи, и каждое число, начиная отъ единицы, разсматриваетъ отдѣльно. Напр. для упражненій въ наглядности онъ употреблялъ черточки или линіи вотъ такъ:



и т. д. до десяти.



и пр.

Линія и ихъ части.

r.

и далѣе

s.

и пр.

u.

Всего разновидныхъ таблицъ, изъ которыхъ мы сдѣлали эти выдержки, въ руководствѣ Шмида было 6.

По этимъ видимымъ знакамъ, Шмидъ надъ каждымъ числомъ производитъ разныя комбинаціи. Возьмемъ, для примѣра, число *три*, изобразивъ его, для краткости цифрою 3.

1. Три состоитъ изъ трехъ разъ *одинъ*. Одинъ и одинъ — два, два и одинъ — три; или два раза одинъ и одинъ.

2. Если отъ трехъ отнять *одинъ*, то будетъ *два*, а если еще отнять *одинъ*, то будетъ *одинъ*, а если еще *одинъ*, то ничего не останется.

3. *Одинъ* отъ трехъ составляетъ *третью* часть; два отъ трехъ — двѣ трети.

4. Чтобы получить четыре, надобно къ тремъ прибавить единицу, а чтобъ получить два — отнять единицу,

и т. д.

Такъ продѣлываетъ и всѣ прочія числа, цѣлыя и дробныя, стараясь каждое разсматривать какъ въ отношеніи къ другимъ числамъ, такъ и въ отношеніи собственныхъ частей его.

Въ концѣ своего курса, Шмидъ предлагаетъ для своихъ учениковъ такія задачи, надъ которыми обыкновенный ариѳметистъ, не продѣлавшій всѣхъ этихъ предварительныхъ упражненій не-мало призадумается.

Примѣры.

1. Какое число займетъ 20-е мѣсто въ послѣдовательномъ ряду чиселъ, гдѣ первымъ числомъ будетъ 2, а каждое слѣдующее число *вдвое* болѣе своего предыдущаго?

Отвѣтъ. 40.

2. Отыщите число, которое должно занимать 20-е мѣсто въ такомъ ряду чиселъ, гдѣ первымъ стоитъ $10^1/_2$, вторымъ на $2^1/_2$ болѣе, третьимъ на $2^1/_2$ болѣе втораго, и т. д.?

3. Первое число 100, второе менѣе перваго на 2, третье менѣе втораго тоже на 2, и все въ томъ же порядкѣ уменьшенія какое число займетъ 30-е мѣсто?

Отвѣтъ. 42. Первое число *сто*, каждое послѣдующее двумя единицами менѣе. Такихъ послѣдующихъ всего числомъ 29, изъ нихъ каждое увеличивается все на 2, такъ-что 29-ое будетъ 29×2 или 58; значитъ 30-е должно быть менѣе 100 на 58, т. е. число 42.

4. Сколько составитъ сумма 10 чиселъ натуральнаго ряда чиселъ (1, 2, 3, 4 и т. д.)?

Отвѣтъ. 55.

5. Сколько составитъ сумма 17 чиселъ изъ такого ряда, гдѣ первымъ числомъ стоитъ 2, а каждое послѣдующее на *три* единицы болѣе своего предыдущаго?

Отвѣтъ. 442.

6. Сколько четныхъ чиселъ заключается между 1 и 300?

Отвѣтъ. 150.

7. Сколько нечетныхъ чиселъ заключается между 1 и 200?

Отвѣтъ. 99.

8. Сколько нечетныхъ чиселъ заключается въ послѣдовательномъ рядѣ чиселъ, сумма которыхъ составляетъ 1000?

Шмидъ даже до того записался, что въ элементарномъ своемъ курсѣ знакомитъ учащихся съ *отрицательными* величинами, какъ ихъ объясняли тогда математики; т. е. такими величинами, которыя *менѣе нуля*. Вотъ, напр. какой вопросъ ставитъ Шмидъ дѣтямъ: какимъ числомъ 10 положительныхъ единицъ превышаетъ 10 отрицательныхъ единицъ?—На этотъ курьозный вопросъ ученики его отвѣчаютъ безъ запинки: числомъ 20 *).

Резюмируя ученіе Песталоцци, непосредственно приходишь къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1. Ученіе это по преимуществу можетъ быть названо *методою*, или лучше: *естественною методою*. Здѣсь подмѣчены такія правила, которымъ и каждый автодидактъ пользуется въ процессѣ сознанія, при переходѣ отъ отдѣльныхъ чувственныхъ, иногда въ началѣ темныхъ и сбивчивыхъ представленій къ яснымъ и точнымъ понятіямъ, или отъ простаго къ сложному, отъ частнаго къ общему. Не менѣе справедливо и то, что быстрота этого перехода совершенно зависитъ

---

*) Знаменитый Эйлеръ, жившій въ то время, когда метафизика царила повсюду, въ своей «Всеобщей Ариѳметикѣ», или алгебрѣ, вотъ какъ объяснялъ значеніе отрицательныхъ величинъ. Если я имѣю:—10 р., то это значитъ, что я не только ничего не имѣю, но еще на мнѣ лежитъ долгу 10 р., такъ что когда я получу 10 р. и уплачу свой долгъ, то тогда буду имѣть *ничего*. Поэтому безъ этихъ десяти рублей я имѣю *менѣе нежели ничего*. Такое толкованіе *отрицательныхъ* величинъ вошло потомъ во всеобщее употребленіе въ учебникахъ. Такъ и подъ реальнымъ математическимъ знакомъ *0* стали понимать *ничего*. Разумѣется въ простую, здоровую голову вложить такія понятія никакъ нельзя, тогда какъ человѣкъ съ попорченными метафизикою мозгами, отвѣтитъ безъ обиняковъ: да, я это совершенно понимаю.

отъ возраста ученика, степени развитія всего его организма и отъ количества пріобрѣтенныхъ имъ познаній. Съ 8—10 лѣтними дѣтьми, приходящими въ школу съ весьма малыми, по содержанію и объему, знаніями изъ общественнаго быта, непривыкшими даже мало-мальски сносно объяснять свои разрозненныя мысли на своемъ родномъ языкѣ, было бы безразсудно, какъ это дѣлалось прежде, начинать науку, хотя бы самую элементарную, съ общихъ понятій и опредѣленій, искуственно расположенныхъ и сплоченныхъ между собою въ такъ-называемую *систему*. Песталоцци круто и рѣзко повернулъ такой способъ преподаванія и этимъ произвелъ дѣйствительно замѣчательную реформу въ дѣлѣ школьнаго обученія. Такъ въ отдѣльности и по наукѣ исчисленія, онъ начинаетъ не съ общихъ опредѣленій, теоремъ и постулятъ, какъ это обыкновенно дѣлалось, а съ разсматриванія отдѣльныхъ, «наглядныхъ» представленій, или просто съ дѣйствительныхъ однородныхъ предметовъ. Онъ не озадачиваетъ ребенка общимъ категорическимъ опредѣленіемъ числа, что въ пору понять и взрослому, но ведетъ его къ этому сознанію путемъ медленнымъ, постепеннымъ и выжидательнымъ, оставляя такія опредѣленія до конца курса. Въ его упражненіяхъ понятіе «число», не представляется ребенку отвлеченно, а сначала всегда въ соединеніи съ предметами, которые оно обозначаетъ. Такъ всегда постепенно даетъ ему наконецъ понять что̀ значитъ *число*, что̀ значитъ *много*, что̀ *мало*, что̀ *болѣе*, что̀ *менѣе*, чѣмъ *болѣе* или *чѣмъ менѣе*, *во сколько разъ болѣе* или *во сколько разъ менѣе*, что̀ *цѣлое* и что только его *часть* или части его и т. д. и т. д.

Тутъ дѣйствительно, какъ думалъ Песталоцци, «*наглядность*» *составляетъ самую прочную основу всего элементарнаго обученія*. Этотъ способъ стали примѣнять къ дѣлу учители и другихъ предметовъ обученія. Такъ Стефани, сотрудникъ Песталоцци, по этимъ началамъ совершенно измѣнилъ обученіе азбукѣ и чтенію; швейцарскій патеръ Жераръ указалъ образцы преподаванія элементарной грамматики; методъ изученія географіи также совершенно измѣнился; даже элементарная логика стала вполнѣ доступной возрастнымъ дѣтямъ. Неоспоримо, въ этомъ указаніи на способъ обученія состоитъ главная заслуга Песталоцци, которая никогда не забудется въ исторіи педагогики. Не мудрено, что сотни, тысячи молодыхъ педагоговъ, воспитанныхъ на схоластикѣ, даже въ университетскихъ аудиторіяхъ, увлеклись за нимъ безотчетно. Но это-то безотчетное ихъ увлеченіе если, съ одной стороны, много помогло элементарному обученію, то,

съ другой, не мало ослабило его силу, недостаточно повліявъ на возбужденіе энергіи въ дѣтяхъ и на ихъ самодѣятельность *).

2) Но вотъ что всего страннѣе, и что объясняется наклонностію нѣмца всегда порываться къ идеализаціи: то, что въ началѣ съ такимъ упорствомъ отстаиваетъ Песталоцци въ своей теоріи «наглядности», имъ же потомъ, по переходѣ отъ словъ къ дѣлу, и отвергается! Въ своей Mutter Buch онъ доходитъ даже до смѣшнаго съ

---

*) Не мудрено, что и у насъ, съ конца пятидесятыхъ годовъ, гдѣ до того времени печать слишкомъ мало заботилась о педагогическихъ вопросахъ, а тутъ заговорила о нихъ съ особымъ пошибомъ, когда на страницахъ новаго журнала (Журналъ для Воспитанія, Чумикова), появился первый лепетъ дѣтской ариѳметики Грубе, помнится въ переводѣ г. Паульсона, и тутъ же вскорѣ съ громкими рекламами произошло на свѣтъ «Родное слово» Ушинскаго, не мудрено что наша педагогическая молодежь чуть не сошла съума отъ радости, и только въ послѣднее время начала нѣсколько отрезвляться, когда сельскіе учители стали все чаще и чаще доносить, что не смотря на всю словоохотливость Грубе и послѣдователя его г. Евтушевскаго, не смотря на всю ихъ заботливость дѣлать изъ маленькихъ людей большихъ философовъ, ариѳметика все-таки идетъ очень плохо въ школахъ. Грубе до того заврался, а вмѣстѣ съ нимъ и его послѣдователи, что сталъ считать «*задачею преподаванія ариѳметики въ народной школѣ—нравственное образованіе, придавая этому значенію самый обширный смыслъ!* Новѣйшій же изъ послѣдователей Грубе г. В. Воленсъ (Методъ элементарнаго преподаванія Ариѳметики, 1880 г.), еще болѣе туманный, чѣмъ самъ Грубе, смаливаясь, съ одной стороны ересью, возникшей противъ этого школьнаго апостола, а съ другой, чувствуя, что и самъ не болѣе дѣлаетъ, какъ профанируетъ его, избралъ золотую середину и предложилъ вотъ какую эклектическую постуляту: «*преподаваніе ариѳметики въ народной школѣ должно имѣть воспитательное значеніе и въ то же время должно давать знанія, полезныя для практической жизни*». И почему только въ народной школѣ? А, напримѣръ, въ женскомъ пансіонѣ благородныхъ дѣвицъ, какого преподаванія должно держаться? — Между тѣмъ самъ г. Воленсъ начинаетъ свое предисловіе слѣдующими словами: Съ тѣхъ поръ какъ въ наши школы стали проникать новыя методы преподаванія, все чаще слышатся жалобы на неуспѣшность преподаванія элементарной ариѳметики и на рекомендованные новые усовершенствованные способы обученія, дѣло идетъ только немного лучше чѣмъ въ старой школѣ. *На самомъ дѣлѣ оказывается, что всѣ новые методы совершенно безплодны въ начальной школѣ*». Желательно было бы слышать, что отвѣтили на эти знаменательныя слова гг. Евтушевскіе, Вулихи и проч.? Но не думаетъ ли и самъ г. Воленсъ, что онъ изобрѣлъ новую панацею отъ всѣхъ школьныхъ болѣстей нашей современной педагогики? Чѣмъ же книга его отличается отъ книги г. Евтушевскаго, которая такъ широко и далеко распространилась въ нашихъ школахъ? Рѣшительно ничѣмъ, развѣ только еще большею туманностію. И тотъ и другой тотъ же Грубе. Имъ-то, кажется, не слѣдовало бы коригь глаза другъ другу.

этою «наглядностію», заставляя мать считать съ своимъ малолѣткомъ его уши, глаза, пальцы на рукахъ и ногахъ, суставы на каждомъ пальцѣ и проч.; но вдругъ, при переходѣ къ своему школьному обученію, въ преподаваніи дѣтямъ своего *«ученія о содержаніи чиселъ»*, ограничиваетъ эту «наглядность» только тремя таблицами, о которыхъ было сказано выше, гдѣ роль играютъ только *черточки* и *квадратныя* клѣтки, раздѣленныя параллельными линіями вдоль и поперегъ еще на меньшія клѣтки! А между тѣмъ онъ задалъ себѣ задачу чрезвычайно трудную: дать ребенку совершенно абстрактное понятіе о числѣ и о законахъ его видоизмѣненія, тогда какъ не только дѣти, но многіе и изъ взрослыхъ обыкновенно съ представленіямъ о какомъ-либо числѣ непремѣнно соединяютъ и ту группу дѣйствительныхъ предметовъ, которые этимъ числомъ выражаются, и только по многимъ опытамъ и долговременнымъ практическимъ упражненіямъ получаютъ наконецъ абстрактное понятіе. Это тоже самое, что еслибъ учитель, начавъ преподаваніе геометріи, не шелъ бы далѣе, пока ученики его не получили совершенно точнаго понятія о математической точкѣ, математической линіи, плоскости и проч., между тѣмъ указывая имъ только на вещественные предметы: на точку и линію, проведенныя мѣломъ, карандашемъ или перомъ и проч. Да и къ чему, спрашивается, набивать головы дѣтей такими абстракціями, когда характеръ науки вовсе того не требуетъ?

Песталоцци, конечно, не понималъ, да въ его время и высокіе математики еще не сознавали, что элементарная математика, особенно въ преподаваніи дѣтямъ и юношамъ, *должна имѣть совершенно конкретный характеръ*, какой ей дѣйствительно и присущъ.

Понимай онъ это въ свое время, тогда, безъ сомнѣнія, не имѣлъ бы и надобности напирать такъ сильно на возбужденіе въ дѣтяхъ вниманія, не жалѣя даже употребленія къ тому репрессивныхъ мѣръ.

Методѣ Песталоцци еще болѣе приличествовалъ бы признакъ «естественная», еслибъ онъ въ дѣлѣ науки не ограничился только наблюденіями надъ умственнымъ развитіемъ дѣтей, часто случайно попадавшихся ему подъ руку, но прослѣдилъ бы за исторіею всей математики, насколько она извѣстна отъ древнихъ временъ. Что было въ искусствѣ древнихъ, то было и въ наукахъ: вездѣ реальность, вездѣ конкретность. Эвклидъ оставилъ намъ въ наслѣдіе трактатъ о геометріи до того полный и совершенный, что и новѣйшіе геометры не многое могли къ нему прибавить. Тутъ «наглядность» строго

проведена отъ начала до конца: сперва идетъ *начало наложенія*, потомъ, когда оно истощается, *началю подобія фигуръ и пропорціональность*, наконецъ *начало предѣловъ*, все наглядно, все осязательно и конкретно. Между тѣмъ наука исчисленія—младщая сестра геометріи, хилая, слабая, едва плетется у древнихъ за такимъ грандіознымъ, правильнымъ строемъ. Она даже не выработала для себя въ то время надлежащей нумераціи, такъ что самый цивилизованный народъ изъ древнихъ, каковы были римляне, довольствовался только въ своихъ счетахъ числами отъ 1 до 10,000, а для изображенія этихъ чиселъ— нѣсколькими черточками, крестиками и нѣсколькими буквами. Иначе и быть не могло по самой природѣ вещей. Практическая цѣль *изученія* геометріи какъ была сначала, такъ и теперь осталась таже— *измѣреніе* трехъ родовъ опредѣленныхъ протяженностей. Но до измѣренія протяженностей мы доходимъ чрезъ *сравненіе* ихъ между собою посредствомъ третьей, съ ними однородной и вполнѣ извѣстной протяженности, которую принимаемъ за *мѣру* сравненія. Получаемый изъ этого сравненія выводъ, обозначающій *чѣмъ* именно одна изъ протяженностей болѣе или *менѣе* другой, или *во сколько* разъ одна болѣе другой и составляетъ то, что мы называемъ *числомъ*. Сначала мѣрами протяженностей служили для человѣка части его тѣла, какъ-то: *ступня* (по англійски *футъ*, по голландски *фусъ*— нога, ступня), *локоть*, *горсть*, *пригоршни*, *щепоть*, *штука*, *мѣшокъ* и проч., а потомъ, по мѣрѣ развитія общественной жизни, онъ началъ употреблять и условныя мѣры, которыя стали чрезвычайно разнообразиться, а вмѣстѣ съ тѣмъ разнообразиться и усложняться и самыя выкладки надъ числами. Снисходя отъ исторіи человѣчества къ исторіи каждаго цивилизованнаго народа, наконецъ къ исторіи развитія каждаго человѣка, въ отдѣльности, мы повсюду увидимъ тотъ же самый процессъ. Такимъ образомъ во всякомъ такомъ случаѣ, гдѣ приходится *измѣрять*, тамъ уже и *исчисляемъ*. Понятно, что всякой настолько имѣетъ надобности въ *числѣ* и настолько его понимаетъ, насколько имѣетъ надобности въ *измѣреніи*. Въ устахъ нашего простаго народа, гдѣ грамотность недалеко ушла, слышите слова: *десять*, *двадцать*, *семь*, *сто* и проч. и вообще *число*, въ тѣхъ только случаяхъ, когда дѣло идетъ или шло о какомъ-либо измѣреніи, и притомъ непремѣнно съ присоединеніемъ къ этимъ числамъ наименованія тѣхъ мѣръ, которыя они изображаютъ. Точно тоже происходитъ и въ ребенкѣ, маленькомъ человѣкѣ, крошечной частицы своего народа, но только еще въ болѣе узкомъ и сжатомъ объемѣ,

насколько онъ принимаетъ и въ состояніи принимать участія въ общей жизни сперва своего семейства, потомъ своего общества. Прослѣдить за всѣми такими моментами развитія никакая педагогика не можетъ. На быстроту или медленность всякаго развитія кромѣ естественнаго развитія самого организма, имѣетъ вліяніе множество случайныхъ обстоятельствъ времени и мѣстности. Но для школы этого и не нужно. Было бы только безразсудствомъ скликать въ школу, подъ ферулу учителя, малолѣтокъ семи, шести, даже пяти лѣтъ, чтобы начать съ ними подводить подъ систему тѣ агрегаты познаній о числѣ, которые они успѣли сохранить въ своей памяти изъ своей жизни въ семьѣ. Эта поспѣшность пичкать дѣтей научными свѣдѣніями, когда у нихъ дѣйствительно еще молоко на губахъ не обсохло, есть болѣзнь нашего времени, о которой такъ страшно вопіютъ теперь гигіенисты. Здоровая школа, чтобъ ей продолжать быть здоровою, собираетъ къ себѣ дѣтей только въ возрастѣ 8, 9, 10 лѣтъ, не ранѣе, смотря по развитію организма. Но въ этомъ возрастѣ дѣти являются въ школу, хотя и безграмотными, настолько однакожъ развитыми и обогащенными знаніями изъ бытовой своей мірской жизни, что держать ихъ, напримѣръ, цѣлый годъ на изученіи чиселъ отъ 1 до 20, и потомъ опять годъ на числахъ отъ 1 до 100, какъ предписывается нашими учебными программами, и держать ихъ всѣхъ до единаго, не смотря на различіе ихъ способностей и ихъ первоначальныхъ познаній, чтобы ни одинъ изъ нихъ не выскакивалъ впередъ, и притомъ съ цѣлію, какъ утверждаютъ, чтобы они всесторонне изучили *число*, да это такая метафизика, которая могла войти только въ голову нѣмца. Во всякомъ случаѣ за русскихъ дѣтей мы ручаемся, если только съ ними не философствовать, а вести школьное дѣло конкретнымъ путемъ, что они могутъ выучить ариѳметику и скорѣе и проще, чѣмъ какъ рецептуютъ *разныя методики*. «Можетъ быть», замѣчаетъ графъ Л. Н. Толстой, говоря о томъ же предметѣ, «дѣти готтентотовъ, негровъ, можетъ быть иныя нѣмецкія дѣти могутъ не знать того, что имъ сообщаютъ въ такихъ бесѣдахъ (Ушинскій, Бунаковъ, Евтушевскій), но русскія дѣти, кромѣ блаженныхъ, всѣ приходящія въ школу знаютъ» и проч. *). Вотъ и выходитъ наконецъ то, о чемъ повѣствуетъ новѣйшій методикъ г. Воленсъ: «*на самомъ дѣлѣ оказывается, что всѣ новыя методы совершенно безплодны въ начальной школѣ*». Еще бы! когда вы, съ помо-

*) Отеч. Зап. 1874 г., сентябрь, стр. 107 — 204.

щію хитроумныхъ нѣмцевъ, простое занятіе съ дѣтьми *счетомъ* обратили въ упражненія логикою, а апостолъ вашъ Грубе пошелъ еще далѣе, произведя ариѳметику въ чинъ *нравственной науки*, да еще въ самомъ обширномъ ея смыслѣ! Мудрено ли, что духовнымъ отцамъ остается теперь, сложивъ свои катехизисы и возвращаться вспять отъ соблазна сего.... Ариѳметика учитъ нравственности, отцамъ остается учить ариѳметикѣ!

Еслибъ Песталоцци побольше вдумывался въ свою методу, ему слѣдовало начать ее не съ сочиненныхъ имъ таблицъ, но прямо съ изученія геометрическихъ тѣлъ, съ разсматриванія и исчисленія признаковъ, въ нихъ замѣчаемыхъ, какъ то: точекъ, линій, угловъ, плоскостей и проч., и проч.; тогда бы его «Ученія о содержимости чиселъ» было совершенно основано на «наглядности», а дѣти оказывали бы успѣхи легко, скоро и непринужденно. Притомъ, при разсматриваніи этихъ признаковъ, при исчисленіи ихъ и измѣреніи, если онъ употреблялъ бы и черченіе, то, конечно, такое изученіе оказалось бы для нихъ впослѣдствіи еще плодотворнѣе. Нѣкоторую часть этой общей задачи разрѣшилъ потомъ Дистервегъ въ своемъ «Ученіи о пространствѣ (Raumlehre etc.)» и рѣшилъ удовлетворительно. Только жаль, что и онъ увлекся послѣдовательными рядами, какъ подготовкою учениковъ для алгебры и, занявшись ими, впалъ въ абстракціи. Остановись онъ болѣе на конкретныхъ знаніяхъ, примѣни къ нимъ исчисленіе, и тогда его руководство надолго осталось бы образцовымъ. Современникъ Дистервега, Тюрке имѣлъ тотъ же взглядъ на преподаваніе элементарной математики. Но ни тому, ни другому, по причинѣ преждевременнаго удаленія ихъ отъ практики дѣла, не удалось осуществить, развить и обобщить добытые ими опыты и наблюденія. Нѣтъ сомнѣнія, труды ихъ не умрутъ; но теперь написать элементарный курсъ, на основаніи выработанныхъ ими опытовъ, особенно у насъ, гдѣ схоластическія программы и разные регулятивы еще такъ крѣпко держатся въ учебныхъ заведеніяхъ, было бы преждевременно. Просто такую книгу не приняло бы въ руководство ни одно учебное заведаніе.

Но если бъ осуществился такой курсъ, то метода Песталоцци, положившая всему начало, представилась бы теперь въ полномъ своемъ развитіи. Тогда не понадобилось бы постоянно держать дѣтей въ напряженномъ состояніи, для сосредоточенія ихъ вниманія на какомъ-либо одномъ предметѣ или еще хуже того, на цѣломъ рядѣ однородныхъ предметовъ, какъ совѣтуетъ Песталоцци. Самая его

«наглядность», на которую онъ такъ упиралъ, нисколько не теряясь бы въ преподаваніи. Весь ходъ школьнаго дѣла не ограничился бы только *созерцательностію* и умственною игрою въ числовыя комбинаціи, какъ видѣли выше. Понадобилось бы работать не только глазомъ и памятью, но и рукою и воображеніемъ и другими силами, такъ какъ при изученіи признаковъ геометрическихъ тѣлъ представилось бы много средствъ и для исчисленія, и для черченія и, наконецъ, для рисованія, и все велось бы въ сферѣ *конкретнаго*, столь свойственной дѣтямъ. Прекрасный афоризмъ Дистервега: «что *глазъ* видитъ, *умъ* созерцаетъ, *слово* выражаетъ, то *рука* должна изобразить», получилъ бы настоящее свое приложеніе *). Самое изреченіе Песталоцци, что *мѣра*, *число* и *слово* суть основы всякаго обученія, вполнѣ бы осуществилось на дѣлѣ.

3. Другой крупной недостатокъ методы Песталоцци состоялъ въ томъ, что онъ слишкомъ уже злоупотреблялъ психическими способностями ребенка: *вниманіемъ* или *вниканіемъ* и *памятью*, какъ бы задерживая въ немъ въ тоже время развитіе прочихъ его душевныхъ способностей: воображеніе, волю, разумъ и проч. И дѣйствительно, только при страшномъ напряженіи вниманія ребенка можно было ему успѣвать слѣдить за всѣми этими рядами числовыхъ группъ, чтобы не только понять каждую изъ нихъ въ отдѣльности, но и опредѣлить ея составъ изъ предшествующихъ ей группъ. Надобно чтобъ ученикъ или слишкомъ любилъ своего учителя, или слишкомъ боялся его, чтобы безпрекословно слѣдовать за нимъ въ такой головоломкѣ, разумѣется, съ безпрестаннымъ сдерживаніемъ порывовъ своей воли. Тогда это называли, да и теперь еще называютъ *воспитаніемъ воли* ребенка. Отъ этого установилось даже правило, *что учитель въ классѣ все, а ученикъ долженъ дѣлать только то, что тотъ указываетъ*. Учебная книга, какъ лучшій пособникъ для ученика въ пріобрѣтеніи имъ познаній, стала считаться не только безполезною, но даже вредною для него. «Пришедши въ классѣ, сядь смирно на свое мѣсто, имѣй на готовѣ доску и грифель, и потомъ какъ вкопанный слушай только то, что говоритъ тебѣ учитель, и дѣлай только то, что онъ прикажетъ дѣлать» — вотъ правило, кото-

---

*) Въ «Русскомъ Педагогическомъ Вѣстникѣ» 1857 и 1858 гг. любопытствующіе найдутъ цѣлый рядъ упражненій въ элементарной геометріи, доступныхъ самому раннему школьному возрасту дѣтей. Я ихъ выпустилъ здѣсь изъ общаго конспекта въ видахъ его сокращенія.

раго и теперь многіе придерживаются. А когда замѣтятъ, что дѣти устаютъ, то заставляютъ ихъ хлопать въ ладоши, спрыгивать съ мѣста, пропѣть веселенькую пѣсенку и т. д.. «Какъ бы талантливо не написано было руководство, говоритъ неизвѣстный рецензентъ Практической Ариѳметики, никогда мертвая книга, при серьезномъ обученіи науки не можетъ замѣнить живаго преподаванія учителя» *). Вотъ это-то уничтоженіе всякой самобытности учащагося въ школѣ, вотъ это-то *живое слово* учителя, безъ умолку раздающееся въ классѣ, при безмолвіи дѣтей до того, чтобъ и муха, когда пролетитъ, была слышна, что началось съ Песталоцци, если притомъ не забыть подхватить къ нему и предшественника его словоохотливаго Базедова, и есть та хроническая болячка, которая разъѣла всю силу самобытнаго изученія и сжала всю энергію ученика, не давая ей ни времени, ни мѣста привольно развиться. Педагоги не хотѣли сознать, и не сознаютъ до сихъ поръ, что хотя школа есть таже самая мастерская, но мастерская, въ которой каждый дѣлаетъ свое дѣло и отвѣчаетъ за него. Это мѣсто самобытнаго труда, работы, которая, конечно, болѣе спорится при совмѣстномъ участіи многихъ, но гдѣ однакожь одинъ другому мѣшать никакъ не долженъ. Бояться дисгармоніи отъ такого совмѣстничества, оглушающей уши — напрасно. Но это конечно труднѣе, чѣмъ безумолку изливать *живое слово* съ каѳедры до упаду силъ, до поту лица. Прежнихъ учителей обвиняли въ томъ, и бо́льшею частію справедливо, что они только зѣвали въ классѣ, заставляя дѣтей просиживать за повтореніемъ уроковъ по книжкамъ, съ однимъ условіемъ, чтобъ они сидѣли тихо; новыхъ точно также можно обвинить въ томъ, что своимъ живымъ словомъ они держатъ дѣтей въ постоянной инерціи силъ. Результаты бываютъ одинаковы. Учебникъ учебнику рознь. Не споримъ, что весьма трудно написать такой учебникъ, который способствовалъ бы учащемуся изучить науку помимо *излишней* помощи и угодливости со стороны учителя. Соглашаемся также, что и учителей не всегда винить можно. Другой и съумѣлъ бы распорядиться *своимъ живымъ словомъ*, чтобъ и самостоятельность учащихся получала надлежащее значеніе въ классѣ; но для этого нужно условіе, чтобы преподаваніе

*) «Голосъ», № 86, 26 марта 1880 г. Кстати, можно было бы тутъ спросить рецензента: Что такое серьезное обученіе науки и что такое несерьезное? Что такое живое слово? Что мертвая книга? Что такое талантливо написанная книга и вмѣстѣ мертвая? Что такое живое слово и вмѣстѣ безталантное?

было свободно. Къ сожалѣнію, здѣсь учитель часто оказывается безсиленъ, потому что впередъ знаетъ, что малѣйшее отступленіе отъ аппробованнаго *тупаго и неудобоваримаго* учебника грозитъ ему бѣдою, что указанная ему въ утвержденныхъ программахъ рецептура педагогическихъ снадобьевъ не можетъ быть измѣнена ни на іоту; къ тому же, ну, какъ начальство войдетъ и замѣтитъ шумъ въ классѣ, впрочемъ сколько можетъ быть шума отъ 30, 40 работающихъ живыхъ существъ, новая напасть послѣдуетъ — распеканье.

Спустя четверть столѣтія послѣ обнародованія ученія Песталоцци и коментарнаго Шмида, преподаваніе ариѳметики въ народныхъ школахъ принимаетъ уже другую форму, удерживая однако за собою главныя основанія и правила методы Песталоцци. Долговременный опытъ доказалъ, что результаты отъ идеализаціи Песталоцци не только не соотвѣтствовали ожиданію, но оказывались иногда самые ничтожные. Если и допустить, что элементарная ариѳметика приноситъ формальную пользу, дѣйствуя на развитіе логическаго мышленія учащагося (какъ будто грамматика и другія учебные предметы не дѣлаютъ того же самаго!) однакожь никогда не должно опускать изъ вида матеріальную ея пользу, какъ такого предмета знанія, который нуженъ для каждаго.

Въ Германіи, гдѣ общественная мысль въ это время работала сильно, не то, что у насъ, гдѣ она спала, особенно въ концѣ первой четверти нынѣшняго столѣтія, сномъ праведныхъ, педагогика продолжала занимать серьезные умы, болѣе чѣмъ даже это было при Песталоцци, проведшаго всю жизнь въ тѣсномъ кругѣ швейцарскихъ уединенныхъ мыслителей. Въ этомъ-то времени и по предмету, насъ теперь занимающему, появилось много сочиненій весьма извѣстныхъ педагоговъ: Бирмана, Гофмана, Тюрка, Пельмана, Тиллера, Гагена, Стефани, Каверау, Штейна, Шольца, Динтера, Криза и проч., и хотя всѣ они продолжали идти подъ знаменемъ Песталоцци, но уже во многомъ стали опережать его.

Основныя правила *новой методы изустнаго исчисленія*, констатированныя ими, въ общности были слѣдующія:

1. Преподаваніе не должно имѣть только матеріальную, но также и по преимуществу, формальную пользу; т. е. довести дѣтей не только до нужнаго навыка въ исчисленіи, но возбудить въ нихъ умственную дѣятельность, по возможности содѣйствуя упражненію и укрѣпленію ихъ мысленныхъ способностей.

2. Ученики, подъ руководствомъ учителя, не только должны по-

нимать правила, на которыхъ основано исчисленіе, но и сами ихъ находить *).

3. Число и цифра должны быть надлежащимъ образомъ различены, и чисто изустное исчисленіе, *умственная наглядность* чиселъ, ихъ отношеній, и изустныя дѣйствія подъ числами вообще, всегда должны предшествовать цифирному или цифровому исчисленію.

4. Поэтому ученикъ долженъ пріобрѣсти прежде вѣрныя наглядныя познанія о числахъ, ихъ содержаніи и ихъ отношеніи между собою; умственной наглядности должна предшествовать чувственная.

5. Ходъ преподаванія долженъ начинаться съ наглядности единицы, какъ элемента всѣхъ чиселъ; потомъ дѣти сами должны составлять числа, приводить ихъ въ систематическій порядокъ и ознакомиться съ содержаніемъ ихъ прежде, чѣмъ начнется преподаваніе отдѣльныхъ дѣйствій ариѳметики.

6. О дробяхъ должно говорить ранѣе чѣмъ это дѣлали прежде; на нихъ должно обратить вниманіе уже при элементарныхъ упражненіяхъ.

Въ параллель съ этой группой писателей является другая группа, представителями которой были: Кохъ, Баумгартенъ, Фишеръ, Мейеръ, Риссъ, Шелленбергъ и другіе. Баумгартеномъ и я много руководствовался при составленіи моей книги «Ариѳметическіе листки», изданной въ 1832 г. и разошедшейся потомъ въ двухъ изданіяхъ. Эта группа смотрѣла на преподаваніе ариѳметики далеко иначе и, какъ показали послѣдующіе опыты, оставила за собою тоже много справедливаго и дѣльнаго.

1. Не отрицая, что обученіе ариѳметики, какъ и прочихъ предметовъ, дѣйствуетъ на формальную сторону преподаванія, способствуя развитію природной логики учащихся, нельзя однакожь не согласиться, что не такова главнѣйшая цѣль ея. Ариѳметика, какъ и всѣ учебные предметы общеобразовательнаго курса, имѣетъ ближайшею, а для весьма многихъ и конечною цѣлью—пріобрѣтеніе полез-

*) Здѣсь такъ и слышится Жанъ-жакъ Руссо: je veux que l'élève invente la science. Песталоцци и его ближайшіе послѣдователи находились еще подъ сильнымъ вліяніемъ Руссо; но, переходя отъ словъ къ дѣлу, стали все болѣе и болѣе, сами того не замѣчая, удаляться отъ этого знаменитаго идеалиста, такъ что наконецъ, повернули совершенно въ противную сторону. Отличительный признакъ новѣйшей педагогики въ томъ и состоитъ, что она систематически гнететъ волю воспитанника, старательно обрывая проявляющіеся внаружу отростки, какъ бы съ намѣреніемъ чтобы отъ нихъ никогда и не являлось ни плодовъ, ни цвѣтковъ, ни даже бутончиковъ; какъ же тутъ изобрѣтать науку?

ныхъ свѣдѣній, безъ которыхъ въ правильной и достаточно развитой общественной жизни никакъ обойтись нельзя.

2. Что черточки и линіи такіе же условные знаки, какъ и арабскія цифры, а какъ послѣднія исключительно всѣми употребляются, то и надобно стараться какъ возможно скорѣе съ ними ознакомиться.

3. Что главнѣйшая трудность въ изученіи ариѳметики не въ томъ собственно состоитъ, чтобы понять какъ то или другое число составляется изъ единицъ, что дѣти, по мѣрѣ ихъ практики, мало по малу начинаютъ сознавать и сами, безъ помощи учителя; но въ томъ, какъ имъ сладить съ общепринятой десятиричной системой нумераціи, а потомъ какъ производить правильно и скоро всѣ дѣйствія надъ числами, выраженными въ цифрахъ не только малыхъ, но и большихъ. Тутъ открывается надобность въ изученіи многихъ правилъ, безъ правильнаго усвоенія которыхъ результаты выкладокъ достаются съ трудомъ и съ потерею часто огромнаго времени.

4. Что исчисленія на бумагѣ или доскѣ не только не мѣшаютъ изустнымъ исчисленіямъ, но еще облегчаютъ учащагося, какъ видимыя дѣйствія.

5. Что, наконецъ, только чрезъ разрѣшеніе множества практическихъ задачъ, даже выраженныхъ въ голыхъ цифрахъ, есть единственный способъ пріобрѣтенія сознательнаго навыка въ исчисленіи *).

---

*) Тогда какъ въ первую четверть нынѣшняго столѣтія, во всѣхъ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ, пробавлялись преимущественно переводами французскихъ руководствъ: Белавеня, Франкера, Лакруа и Бурдона, гдѣ ариѳметика начиналась съ общихъ опредѣленій, а потомъ продолжалась въ объясненіяхъ какъ и что должно дѣлать надъ цифровыми группами, а къ каждому изученному такимъ образомъ правилу прилагалось только два или три примѣра для практики, въ одномъ только заведеніи въ Петербургѣ, именно въ нѣмецкой Петропавловской школѣ ученіе велось чисто практически; т. е. главную часть учебнаго времени ученики проводили въ рѣшеніи письменныхъ задачъ. Послѣдствія такого ученія успѣли высказаться скоро и воочью для всѣхъ тогдашнихъ петербуржцевъ. Съ учрежденіемъ министерствъ потребовалось большое число бухгалтеровъ и контролеровъ, и на долгое время Петропавловская школа послужила контингентомъ для нихъ, почти исключительнымъ. Русскіе завидовали тогда нѣмцамъ, относя ихъ успѣхи по службѣ вкрадчивости ихъ, проискамъ и прислужничеству; но это было далеко не справедливо. Всякая бухгалтерская работа выходила изъ ихъ рукъ отчетливою, наглядною, полною и удовлетворительною, тогда какъ работы бухгалтеровъ и контролеровъ изъ русскихъ, даже съ высшимъ математическимъ образованіемъ, часто представляли такую смѣсь ошибокъ и путаницъ, что тѣмъ же нѣмцамъ приходилось все это передѣлывать. Директоръ Петропавловской школы Вейссъ, хотя былъ другомъ Песталоцци, но съумѣлъ отрѣшиться отъ его идеализаціи.

Въ концѣ двадцатыхъ годовъ Тюрке издалъ руководство къ преподаванію ариѳметики подъ названіемъ «Leitfaden zur zweckmässigen Behandlung des Unterrichts im Rechnen». Онъ состоялъ тогда совѣтникомъ школъ, что соотвѣтствовало названію нашего директора школъ, и имѣлъ порученіе отъ прусскаго правительства образовать извѣстное число учителей, которые были бы способны преподавать въ народныхъ школахъ по *новой*, улучшенной методѣ, разумѣя подъ этимъ методу Песталоцци.

Въ основу своего руководства Тюрке принялъ слѣдующія правила:

1. Чтобы важнѣйшія математическія истины были сообщены и тѣмъ ученикамъ, для которыхъ геометрія, по ихъ назначенію, не входитъ въ курсъ преподаванія.

2. Чтобы преподаваніе въ народныхъ школахъ, не смотря на свой небольшой объемъ, могло служить основаніемъ и для дальнѣйшаго обученія въ ариѳметикѣ и геометріи.

3. Заставить какъ учителя, такъ и учениковъ обнять предметъ съ сознаніемъ.

4. Удалить отъ преподаванія всякій механизмъ.

5. Основать все, по возможности, на наглядныхъ познаніяхъ. Съ этою цѣлію употреблять, напримѣръ линіи, при рѣшеніи задачъ простыхъ чиселъ.

6. Чтобы и тогда, когда какой-либо ученикъ, по какимъ-либо причинамъ, не можетъ окончить курса, всякая часть его составляла бы, такъ сказать, особое цѣлое *).

Тюрке лучше другихъ исполнилъ общую задачу и много способствовалъ къ распространенію и упроченію въ Германіи, особенно въ Пруссіи, новой методы обученія элементарной математики въ народныхъ школахъ и въ возникшихъ вскорѣ потомъ учительскихъ семинаріяхъ. Курсъ свой онъ раздѣлилъ на три степени и изложилъ его въ

*) Это золотое правило особенно не возлюбилось нашими официальными педагогами и распорядителями нашимъ народнымъ образованіемъ. Стали было появляться и у насъ, напр. концентрическіе учебники исторіи, но имъ не было дано ходу. То ли дѣло, говорятъ наши ученые педагоги, начать курсъ исторіи въ гимназіи съ изученія древнихъ азіятскихъ и африканскихъ народовъ, потомъ продолжать цѣлый годъ изучать Грецію, далѣе Римъ и проч. Ну, если при такихъ распорядкахъ, ученикъ высшаго класса гимназіи и не докончитъ исторіи—будетъ небольшая бѣда. Пусть онъ остановится на реформаціи, или на семилѣтней войнѣ, дѣло поправимое: остальное узнаетъ изъ чтенія книгъ, а не узнаетъ, такъ и тутъ бѣды не будетъ. Главное дѣло Греки и Римляне. О греки, греки, кто васъ не любитъ!

видѣ концентрическихъ круговъ. Въ объемѣ перваго, ближайшаго къ центру, или въ *первой степени*, всесторонно разсматриваются числа отъ 1 до 10; во *второй степени*: числа отъ 1 до 100, и наконецъ въ *третьей*: всѣ возможныя числа. Курсъ свой онъ предназначилъ для руководства учителей, а не для непосредственнаго употребленія учащихся, предполагая, какъ и Песталоцци, что послѣднія вступаютъ въ школу безъ предварительнаго умѣнья читать и считать. Для наглядныхъ упражненій онъ безпрестанно прибѣгаетъ къ черченію линій, которыя то соединяетъ между собою, то вычитаетъ одну изъ другой, то составляетъ изъ нихъ кратныя величины, то, для ознакомленія съ дробями, дѣлитъ ихъ на большее или меньшее число частей. Въ помощь къ линіямъ употребляетъ римскія цифры *). Въ первыхъ двухъ степеняхъ, кромѣ дробей, насколько доступно ихъ изученіе въ предѣлахъ чиселъ 1—100, онъ знакомитъ и съ употребленіемъ *именованныхъ* чиселъ, разныя дѣйствія надъ которыми также приспособляетъ къ «наглядности». Но такъ какъ существовавшая тогда въ Германіи система монетъ, вѣсовъ, мѣръ длины и проч., была чрезвычайно сложна и запутана, то изученіе чиселъ, превышающихъ 100, заставляетъ автора пускаться въ такія подробности и разъясненія, которыя развѣ только для терпѣливаго нѣмца оказывались сносными. Впрочемъ вся эта система въ настоящее время значительно упростилась даже въ Германіи. Наконецъ Тюрке, на линіяхъ же, знакомитъ учащихся съ теоріею пропорцій и ее примѣняетъ къ рѣшенію такъ-называемыхъ задачъ тройныхъ правилъ.

Въ 1833 году, мною были напечатаны отрывки изъ этого сочиненія **). Затѣмъ составлено въ подражаніе Тюрке, Штейну и Шоль-

---

*) У насъ крестьяне, не умѣющіе грамотѣ, употребляютъ для счета бирки, или длинныя тоненькія палочки, съ одной стороны плоско срѣзанныя, и на нихъ нарѣзываютъ кресты, т. е. десятки. и черточки, замѣняющія единицы. По такимъ биркамъ иной прикащикъ даетъ вѣрный и точный отчетъ хозяину своему, иногда о большомъ числѣ снятаго съ полей въ снопахъ и суслоньяхъ хлѣба, о хлѣбѣ вымолоченномъ и смѣренномъ на гумнѣ, о количествѣ заготовленныхъ разномѣрныхъ дровъ и проч. Сынишка, бѣгая повсюду за своимъ отцомъ прикащикомъ и на поле, и на гумно и въ амбаръ, скоро смѣкаетъ этотъ счетъ, а затѣмъ, когда подростаетъ, принимается и за *счеты*, съ которыми вскорѣ, лишь бы была практика, также ловко научается справляться, какъ и съ бирками. Поэтому въ нашихъ школахъ, при обученіи малограмотныхъ малолѣтокъ, можно начать считать же съ бирокъ, помимо римскихъ цифръ.

**) «Педагогическій Журналъ», 1833 и 1834 г., издававшійся подъ редакціею А. Ободовскаго, Е. Гугеля и П. Гурьева.

цу и цѣлое руководство, озаглавленное такъ: *Руководство къ преподаванію ариѳметики малолѣтнимъ дѣтямъ*, въ двухъ частяхъ 1839 — 1842. Вторая часть не имѣла уже ничего общаго съ этими писателями. Хотя эта книга и была составлена по подражанію, но все, что въ ней было изложено, подвергалось безчисленнымъ опытамъ и наблюденіямъ въ классахъ, какъ самимъ мною, такъ и другими лицами, которыя трудились подъ моимъ наблюденіемъ и руководствомъ. Эта книга была посвящена собственно учителямъ и родителямъ семействъ, которые у себя дома и безъ чужой помощи захотѣли бы обучать своихъ дѣтей. Отъ многихъ я получилъ въ свое время самые благопріятные отзывы. Хотя книга могла бы легко достигнуть нѣсколькихъ изданій, но прежде другихъ я самъ былъ ею не доволенъ, убѣдясь окончательно, что подобныя руководства параллизируютъ энергію и самодѣятельность учащихся, пріучая ихъ съ раннихъ поръ во всемъ и вездѣ ожидать помощи отъ учителя.

Имѣя обширное поле для наблюденій надъ дѣтьми разныхъ возрастовъ и всѣхъ сословій, я пришелъ къ убѣжденію:

1) Что сама жизнь ребенка въ школьномъ возрастѣ, какъ бы скудна и бѣдна ни была его обстановка въ семействѣ, уже обогащаетъ его память внѣшними впечатлѣніями на столько, что являясь въ школу, онъ имѣетъ достаточное понятіе о числѣ, независимо отъ предметовъ, которые имъ изображаются, лишь бы эти числа, по своей величинѣ не выходили изъ предѣловъ тѣснаго круга его міровоззрѣнія. Слѣдовательно, чтобы хлопотать столько и терять столько времени, сколько это дѣлали Песталоцци и его послѣдователи, о доставленіи ребенку категорическаго опредѣленія о *числѣ* было бы непростительною тратою времени въ наше время, когда и безъ того такъ много требуется положительныхъ знаній отъ каждаго учащагося. На вопросъ, напримѣръ: что такое число? гимназистъ дастъ одинъ отвѣтъ, инженеръ, прослушавшій полный курсъ математики — другой, а профессоръ-философъ — третій. Поэтому, если и нельзя миновать въ руководствѣ, назначенномъ преимущественно для самообученія начальныхъ упражненій въ составленіи чиселъ изъ единицъ и проч., то слишкомъ долго останавливаться на числахъ отъ 1 до 100 никакъ не слѣдуетъ.

2. Что бы ни говорили, сколько бы ни писали, но за ариѳметикою въ школѣ должно признать чисто практическій, конкретный характеръ. Дѣло школы научить считать, составлять и разлагать разнаго рода видоизмѣненія и вообще выкладки и то только въ *предѣ-*

лахъ употребленія цифръ, какъ общепринятыхъ знаковъ для чиселъ. Изъ всѣхъ этихъ работъ, производимыхъ надъ числами, выраженными цифрами обще-европейской десятичной системы, юношею наконецъ получаются опредѣленныя понятія только *о нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ чиселъ*, которыя въ состояніи объяснить себѣ и доказать учащійся, если онъ хорошо изучилъ ариѳметику. Говоримъ «нѣкоторыхъ», потому что о *всѣхъ вообще свойствахъ чиселъ*, — науки далеко неоконченной (théorie des nombres) — онъ судить не можетъ, безъ серьезнаго изученія алгебры.

3. Думать, что безъ палочекъ и черточекъ ученикъ сознательно изучитъ употребленіе цифръ не можетъ, тоже несправедливо *). И чѣмъ больше занимаютъ дѣтей этими черточками, точками, линіями и проч., тѣмъ больше утомляютъ ихъ.

4. И мой собственный опытъ, и опыты многихъ другихъ компетентныхъ лицъ, удостовѣрили вполнѣ, что держать долго дѣтей въ школахъ надъ такъ-называемыми *изустными*, или, какъ выражаются до-нельзя точные нѣмцы—головными исчисленіями (Kopfrechnen), значитъ попустому мучить ребятъ и терять съ ними дорогое время ученія. И какіе результаты получаются отъ этой головоломки? Часто весьма не блестящіе. Такъ случалось, что ученики, изустно рѣшавшіе въ младшихъ классахъ самые трудные задачи, прошедшіе цѣлыя серіи послѣдовательныхъ рядовъ, которые имъ такъ пособляли въ самыхъ рѣшеніяхъ, при переходѣ въ слѣдующіе классы, гдѣ кончалась ариѳметика и начиналась алгебра, удивляли своею ненаходчивостію, своею несообразительностію, иногда отказываясь рѣшать быстро и вѣрно цифровыя задачи. Слова нѣтъ, изустное исчисленіе имѣетъ свою пользу. Странно видѣть наоборотъ, когда ученикъ не можетъ рѣшить простой задачи, выраженной къ тому же въ малыхъ числахъ безъ пера, грифеля или карандаша, какъ это въ старину часто бывало. Но только не слѣдуетъ доводить такой родъ исчисленія такъ-сказать до истощанія, отказываясь въ пособіи цифръ. И Тюрке и его послѣдователи, какъ и Песталоцци, чрезвычайно ошибались, обративъ «*изустное исчисленіе*» въ особый предметъ обученія въ школахъ. Я не говорю уже о послѣдующихъ писателяхъ,

*) Ты умѣешь грамотѣ? спрашиваешь инаго крестьянина. Нѣтъ, отвѣчаетъ онъ, а цифры знаю. Какъ же ты научился цифрамъ? Я служилъ въ лабазѣ. Дѣйствительно, между неграмотными много попадается знающихъ употребленіе цифръ, даже до чиселъ болѣе 100.

когда педагогика въ Германіи, особенно въ Пруссіи, стала упадать, расплывшись наконецъ до-нельзя въ своей «наглядности», и отказавшись считать ребенка за самобытно развивающееся существо. Грубе, напримѣръ, дошелъ до того, что въ своей ариѳметикѣ сталъ видѣть кодексъ высокой нравственности, изучить который съ успѣхомъ могли, по его мнѣнію, даже такіе философы, какіе 4 — 5 лѣтніе сосуны! Эта-то дребедень и стала вводиться въ наши народныя школы съ шестидесятыхъ годовъ; но къ какому результату она привела—это уже повѣдалъ г. Волленсъ, послѣдній изъ новаторовъ нашихъ. Онъ не отвергаетъ *новой* методы; совсѣмъ напротивъ. Онъ силится только доказать, что г. Евтушевскій и др. не довольно отуманили своею философіею головы народныхъ учителей, а оттого и весь неуспѣхъ. Довершить начатое Грубе и его послѣдователями — вотъ цѣль его книги. Конечно и онъ, какъ и г. Евтушевскій, всю надежду полагаютъ на *задачники*, издаваемыя ими особо. Такъ или сякъ молъ, имъ думается, ученики выйдутъ изъ тумана, котораго напустили имъ «методики», когда разрѣшатъ множество задачъ. Но они должны же согласиться, что въ этомъ отношеніи трудъ ихъ былъ маленькій: выбирай знай задачи изъ чужихъ учебниковъ, подтасовывай ихъ по своему—и книга готова. А какую связь эти учебники имѣютъ съ самыми методиками, объ этомъ никто и не справляется. Въ нашъ промышленный вѣкъ, при изданіи учебниковъ, цѣль бываетъ своя—особая. Чтобы научиться читать и писать и чуточку грамматики посредствомъ *живого* слова учителя, для этого надобно пріобрѣсти не одну, а нѣсколько книжекъ Ушинскаго, которыя вмѣстѣ стоютъ около 3 р. Чтобъ научиться ариѳметикѣ, и то съ горемъ пополамъ, надобно пріобрѣсти нѣсколько книжекъ г. Евтушевскаго, которыя вмѣстѣ обходятся тоже около трехъ рублей. Г. Воленсъ за ними не отстаетъ; да отъ чего ему и отставать?

5. Анализируя все болѣе и болѣе нѣмецкіе учебники, я убѣдился наконецъ, что въ самомъ планѣ, системѣ ихъ, недостаетъ послѣдовательности и должной связи въ частяхъ, особенно упущена изъ виду теорія обобщенія какъ понятій входящихъ въ ариѳметику, такъ и правилъ для разныхъ дѣйствій надъ числами. Самые пріемы исчисленій излишне разнообразятся; иногда только для соблюденія «наглядности»; вводятся начала, какъ напримѣръ, пропорціи для рѣшенія задачъ тройныхъ правилъ, вовсе чуждыя ариѳметикѣ. Сами говорятъ, что ариѳметика должна приготовлять къ алгебрѣ, а между тѣмъ, по мѣрѣ прохожденія курса, пріемы исчисленій какъ то мало

обобщаются, чтобы ученики были наконецъ въ состоянiи понимать общiя категорическiя сужденiя, на которыхъ основывается алгебра. Въ самыхъ задачахъ, предлагаемыхъ ученикамъ, не соблюдается достаточной постепенности: трудныя предшествуютъ легкимъ. Иногда же появляются такiя задачи, и обыкновенно не на своихъ мѣстахъ, которыя выходятъ изъ круга ариѳметическихъ дѣйствiй, а въ обыденной жизни никогда и встрѣчаться не могутъ, чему можно привести много примѣровъ *).

Покончивъ съ историческимъ очеркомъ, приступимъ къ изложенiю подробнаго конспекта, въ томъ самомъ видѣ, какъ онъ былъ напечатанъ въ 1857 году въ Русскомъ Педагогическомъ Вѣстникѣ, ограничиваясь впрочемъ здѣсь одною только ариѳметикою. Мы ничего не измѣняемъ противъ прежняго, въ виду того, чтобы читатели сами могли удостовѣриться: дѣйствительно ли послѣдующiе за нами писатели, гг. Евтушевскiй, Вулихъ, Воленсъ и др., внесли въ преподаванiе ариѳметики что либо *новое*, чтобъ насъ считать уже отсталыми? **) Сличите этотъ конспектъ съ ихъ *методиками*, съ ихъ обозрѣнiями *метафизическими воззрѣнiями* и, конечно,

---

*) У г. Евтушевскаго и другихъ есть такiя задачи, которыя составляютъ парафразы алгебрическихъ задачъ. Напр. задумано два числа, изъ которыхъ первое вдвое болѣе втораго, а сумма ихъ равна 100. Какiя это числа? Не зная алгебры, не ознакомившись съ уравненiями, ученикъ долженъ затрудниться рѣшить такую задачу. Но вѣдь онъ рѣшаетъ, отвѣтятъ намъ. Да рѣшаетъ, но тогда только, когда учитель впередъ ему растолкуетъ рѣшенiе; самъ же не догадается. Рѣшенiя часто заучиваются учениками со словъ учителя, а это никуда не годится. Говорятъ, что это развиваетъ остроумiе въ дѣтяхъ? Въ такомъ случаѣ занимайте ихъ лучше шарадами. Наука, напротивъ, ведетъ къ высшей, формальной простотѣ знанiя и остроумiе не ея конекъ.

**) Неизвѣстный рецензентъ нашъ («Голосъ». № 86, 26 марта 1880 г.), долженъ быть очень юный, но непремѣнно съ *современнымъ направленiемъ*, вотъ какъ отзывается о насъ:..... «Книга П. С. Гурьева пользовалась въ свое время (первое изданiе вышло въ 1839 г. — Невѣрно, первое изданiе Практической ариѳметики *вышло* въ 1860 г.) заслуженною извѣстностiю, какъ первый по времени у насъ учебникъ, обработанный съ педагогической точки зрѣнiя. Къ сожалѣнiю, съ того времени въ педагогическихъ воззрѣнiяхъ автора не замѣтно ни одного прогресса (!)». Иногда подумаешь, что все это пишется и рекламируется единственно съ цѣлiю—отклонить читателей отъ такой книги, которая стала вразрѣзъ съ экспропрiацiею новѣйшихъ нашихъ педагоговъ, то становится и грустно и смѣшно. Просимъ также вѣрить благосклоннаго читателя, что мы прочли съ большимъ вниманiемъ все то, что было изложено г. Вулихомъ въ V отдѣлѣ книги! «*Систематическiй обзоръ русской народно-учебной литературы*». Изданiе 1878 года.

безъ нашего указанія удостовѣритесь сами, насколько всѣ они черпали, и нерѣдко цѣликомъ, изъ этого конспекта.

Первоначальная Математика [1]) издавна составляетъ одинъ изъ основныхъ предметовъ общаго образованія; но только съ начала девятнадцатаго столѣтія, именно со времени Песталоцци, преподаваніе ея пріобрѣло характеръ, сообразный и съ внутреннею ея сущностію, какъ науки конкретной, и съ возрастомъ дѣтей, которымъ она сообщается. Хотя еще до Песталоцци извѣстные филантропы-педагоги Базедовъ, Роховъ и Зальцманъ пытались въ школахъ высвободить эту важную отрасль знанія изъ-подъ схоластическаго гнета, однакоже ихъ похвальныя усилія ограничились улучшеніемъ однѣхъ част-

[1]) Съ этихъ поръ начинается конспектъ и въ томъ видѣ какъ онъ былъ напечатанъ въ Русскомъ Педагогическомъ Вѣстникѣ, издававшемся въ 1857, 1858 и 1859 гг. подъ редакціею Н. Л. Вышнеградскаго и П. С. Гурьева. Здѣсь я ничего не измѣняю противъ тогдашняго изданія, исключая немногихъ примѣчаній, помѣщенныхъ въ выноскахъ, которыя счелъ нужнымъ прибавить; но, конечно, не касаюсь второй части этого конспекта, здѣсь пропущенной, гдѣ начинаются наглядныя упражненія въ геометріи. Для заинтересованнаго читателя, надѣемся, будетъ важно сличить этотъ конспектъ, изданный слишкомъ двадцать лѣтъ тому назадъ, со всѣми новыми методиками: гг. Евтушевскаго, Вулиха (въ Систематическомъ обзорѣ русской народно-учебной литературы), Воленса (1880 г.) и др. Безъ моего указанія, онъ самъ, при сравненіи, въ чемъ я увѣренъ, укажетъ на такія мѣста *позаимствованія*, которыя цѣликомъ были взяты отсюда, и такихъ мѣстъ найдется не мало, хотя для прикрытія своего плажіата и стали называть меня подражателемъ Генцеля, котораго я никогда и не читалъ. Прибавлю еще: именно съ появленія перевода Грубе и методики Евтушевскаго, за которыми былъ гарантированъ учебными властями такой широкой просторъ для распространенія въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ, съ отстраненіемъ всего, что пѣлось не на ихъ голосъ, и начался у насъ упадокъ преподаванія элементарной математики. Г. Воленсъ, хотя еще болѣе туманный, чѣмъ г. Евтушевскій, однакожь пропѣлъ ему лебядиную пѣсню! Свои своего не познаша. Будетъ ли возвратъ? — увидимъ. Обстоятельства дѣлаютъ все, а не люди. Въ послѣдніе четырнадцать лѣтъ въ нашей русской общеобразовательной системѣ происходили дѣйствительно дивныя явленія: съ одного конца педагогическая лабораторія то и дѣлала, что сжимала въ классическіе тиски полуживыя головы юношей-гимназистовъ, а съ другаго, низшаго, приготовляла дѣтямъ разныя гомеопатическія снадобья, безъ сомнѣнія съ благою цѣлію—обезсилить до-нельзя малѣйшія проявленія энергіи. Тутъ всякая *самодѣятельность, самопомощь* считались если не преступленіями, то такими дѣйствіями, за которыя слѣдовало дѣлать выговоры, внушенія и предостереженія. Зато излюбленные, испытавшіе всѣ эти сладости до конца, награждались дипломами «зрѣлости», послѣ чего двери въ храмъ наукъ для нихъ всегда были отворенными настежь.

ностей, что не могло поколебать того закоренѣлаго упрямства и той сухости, съ какими преподавалась тогда математика, въ особенности въ латинскихъ школахъ. Вотъ какъ описываетъ это преподаваніе извѣстный педагогъ Дистервегъ, который съ своей стороны высказалъ такъ много свѣтлыхъ мыслей объ элементарномъ преподаваніи вообще, ожидающемъ у насъ еще многихъ преобразованій.

«Съ схоластическимъ педантствомъ, говоритъ онъ, преподавалась тогда геометрія по древнимъ формамъ celarent, darii, camestres и проч. Прежніе учители, почти безъ исключенія, знали только формулы свои и немного латыни, и такъ какъ они вовсе не заботились о приведеніи науки въ связь съ жизнію, то и впали въ безплодныя степи отвлеченія. Наконецъ они набрѣли на такую сушь, что математика стала считаться безполезною наукою и понятія «*математикъ*» и «*сухой, непрактическій, чуждый свѣту человѣкъ*» начали приниматься за синонимы. Въ школахъ только весьма малая часть учениковъ усвоила себѣ кое-что изъ этой безжизненной науки, и такихъ виртуозовъ называли или недосягаемыми геніями, или напротивъ, для пустыхъ отвлеченій созданными умами. Кто бы подумалъ за пятьдесятъ лѣтъ тому назадъ, что такой предметъ, который большинству тогдашняго юношества представлялся недосягаемою тайною, могъ когда-либо войдти въ элементарныя школы, въ которыхъ нынѣ обучаются десятилѣтніе мальчики? Но то, что тогда считалось невозможнымъ, нынѣ совершенно осуществилось, по-крайней-мѣрѣ въ Германіи [1])».

Къ сожалѣнію, сознанныя педагогическія начала, сродныя германскому образованію, далеко не привились въ училищахъ другихъ европейскихъ государствъ въ той мѣрѣ, въ какой слѣдовало бы того ожидать. Ученіе Песталоцци, породившее въ Германіи цѣлыя школы, давшее совершенно иной характеръ всему элементарному обученію, нашло только слабые отголоски въ Англіи и во Франціи, и того менѣе у насъ, въ Россіи, гдѣ школьные учебники составляются, за весьма малыми исключеніями, по образцу французскихъ. Стоитъ только сличить тѣ и другіе учебники съ нѣмецкими, чтобы вполнѣ убѣдиться въ томъ, до какой степени наши послѣдовательные въ своихъ дѣйствіяхъ сосѣди опередили и французовъ и насъ въ этомъ отношеніи. То, чѣмъ пробавляется до-сихъ-поръ и французская учебная

---

1) См. сочиненіе Дистервега: Raumlehre, oder Geometrie, nach der jetzigen Anforderung der Pädagogik für Lehrende und Lernende.

литература и наша—гдѣ часто книга, составленная на давно-отвергнутыхъ началахъ, достигаетъ въ одной и той же стереотипной формѣ десяти и болѣе изданій—свидѣтельствуетъ какъ нельзя лучше о скудости нашихъ педагогическихъ познаній. Во Франціи по-крайней-мѣрѣ первоначальная геометрія приложена съ полнымъ успѣхомъ къ искусствамъ и ремесламъ, и чрезъ то, а вмѣстѣ чрезъ учрежденіе воскресныхъ школъ, распространила между художниками и ремесленнымъ классомъ народа, и даже между свѣтскими людьми, множество математическихъ истинъ, что такъ благодѣтельно дѣйствовало на улучшеніе вообще мануфактуръ и ремеслъ; но мы и въ этой чисто практической дѣятельности ничего не проявили самобытнаго, не умѣвъ даже воспользоваться готовыми матеріалами. Правда, труды Дюпеня [1]), Марешаль-дю-Плесси [2]), Мартеня [3]) были переведены на русскій языкъ, но правда также и то, что эти книги залежались въ кладовыхъ книжныхъ лавокъ, не нашедъ себѣ подражателей и читателей.

Между тѣмъ, если взять въ соображеніе, сколько неправильное и тяжелое преподаваніе первоначальной математики останавливаетъ и затрудняетъ успѣхи дѣтей и въ частныхъ домахъ и въ учебныхъ заведеніяхъ, особенно въ женскихъ, то нельзя не подивиться и нашему долготерпѣнію и нашей, доходящей до упрека безпечности, тѣмъ болѣе, что со стороны правительства не было недостатка въ готовности награждать педагоговъ за ихъ полезные труды. Но чѣмъ менѣе у насъ сдѣлано въ этомъ отношеніи, тѣмъ болѣе мы имѣемъ права надѣяться, что всякая попытка составить для родителей руководство къ преподаванію первоначальной математики на началахъ хотя раціональныхъ, однакоже простыхъ и немудреныхъ, руководство, съ которымъ они сами, даже безъ посторонней помощи, могли бы сознательно преподать дѣтямъ своимъ важнѣйшія математическія познанія и въ тоже время положить прочное основаніе для дальнѣйшаго успѣшнаго изученія этого предмета, будетъ принята и снисходительно и съ должнымъ вниманіемъ. При составленіи предлежащаго труда мы имѣли въ виду, кромѣ родителей, и юныхъ воспитательницъ, которыя тотчасъ по выходѣ изъ институтовъ принимаются за тяжелое дѣло обученія дѣтей въ частныхъ домахъ, а мы знаемъ до какой степени затрудняетъ ихъ въ особенности преподаваніе ариѳметики.

---

[1]) Géometrie et Méchanique des arts et des metiers et beaux arts.

[2]) Géometrie des gens du monde.

[3]) Géometrie des metiers.

Съ этою-то цѣлію мы предлагаемъ нашимъ читателямъ и читательницамъ нижеизложенный подробный конспектъ Первоначальной Математики, и впередъ предувѣдомляемъ, что хотя, при составленіи его, мы и имѣли въ виду всѣ лучшія германскіе учебники, однакожь не подражали имъ безусловно, имѣя на своей сторонѣ многолѣтніе опыты и наблюденія, которые научили насъ извлекать съ должною осторожностію и осмотрительностію удѣльный вѣсъ и достоинство изъ всякой новой попытки улучшить элементарное обученіе. Было бы грѣхомъ не признаться здѣсь, что и мы сами въ молодости, вмѣстѣ съ другими, слишкомъ увлекались ученіемъ Песталоцци и его ретиваго сотрудника Шмида, а чрезъ то приведены были ко многимъ ошибкамъ и неудачамъ, отъ которыхъ отъ всей души желаемъ предохранить нашихъ послѣдователей. Предупреждаемъ также и тѣхъ, которые, подобно намъ, захотѣли бы слишкомъ увлечься новѣйшими трудами Дистервега по предмету Первоначальной Геометріи: много прекрасныхъ, свѣтлыхъ взглядовъ бросилъ онъ на этотъ предметъ, въ особенности относительно комбинацій, получающихся чрезъ различныя пересѣченія прямыхъ линій на плоскости и плоскостей съ плоскостями, что съ одной стороны доказываетъ такое тѣсное сродство между наукою протяженностей и наукою чиселъ, а съ другой открываетъ для Минералогіи новое поприще быть наукою точной и опредѣленной; но тѣмъ не менѣе эти изслѣдованія несовмѣстны съ элементарнымъ преподаваніемъ, и учитель, который увлечется ими, непремѣнно отступитъ отъ общихъ требованій Педагогики.

Предлежащій конспектъ раздѣляется на три слѣдующія части:

1) О духѣ и методѣ преподаванія Первоначальной Математики.

2) Собственно подробная программа преподаванія Первоначальной Математики, какъ положительное начертаніе того, что именно можетъ и должно быть преподано дѣтямъ [1].

3) Приложенія къ программѣ, объясняющія, какъ именно можетъ быть преподана то или другое изъ начертаній программы.

---

[1]) Вторая часть этой программы, именно геометріи, напечатанная въ Р. П. В. въ 1857 г., въ настоящее изданіе не входитъ.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

О ДУХѢ И МЕТОДѢ ПРЕПОДАВАНІЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Въ началѣ нашего разсужденія, въ видѣ эпиграфа, мы должны напомнить о слѣдующемъ непреложномъ положеніи Педагогики: «метода всякаго преподаваемаго предмета столько же объусловливается возрастомъ учащихся и естественнымъ ходомъ развитія умственныхъ способностей, сколько сущностію самаго изучаемаго предмета и той практической пользой, какая отъ него ожидается.

У насъ дѣти начинаютъ учиться математикѣ, въ особенности ариѳметикѣ и первоначальной геометріи, слишкомъ рано, еще въ томъ періодѣ развитія, когда они живутъ болѣе жизнію внѣшнею и неспособны углубляться въ самосозерцаніе, тѣмъ менѣе способны постоянно пребывать въ области отвлеченія. Хотя неоспоримо, что первоначальныя понятія о *числѣ* и *измѣреніи* какъ бы прирожденны каждому, такъ что самое малое дитя, далеко еще до школьнаго ученія, прибѣгаетъ уже къ *счету* и *мѣрѣ* вслѣдствіе внутренней потребности своего духа, однакожъ тѣмъ не менѣе должно признать за несомнѣнную истину, что умъ только помощію внѣшнихъ предметовъ можетъ ясно сознать эти дремлющія въ немъ представленія; потому-то и наука о числахъ и наука объ измѣреніи должны собственно начинаться съ видимыхъ предметовъ, и только посредствомъ взаимнаго ихъ *сравненія* и *соединенія*, чрезъ длинный рядъ комбинацій, восходить постепенно до области отвлеченнаго. Трудно предположить, чтобы былъ удовлетворительный успѣхъ, когда съ отрокомъ, который едва можетъ справиться съ самымъ простымъ счетомъ, начать ариѳметику общими опредѣленіями предметовъ, о которыхъ она трактуетъ, классификаціею этой науки, или общими правилами на разныя дѣйствія; еще менѣе можно ожидать успѣха, когда преподать ему геометрію по методѣ Эвклида; ибо Эвклидъ для своего ученія предполагалъ достаточно развитый умъ. Наблюденія доказываютъ, что понятія дѣтей о первыхъ простыхъ истинахъ математики суть чисто конкретныя; въ нихъ нѣтъ, да и не можетъ быть, настоящей математической строгости. Такъ дитя съ понятіемъ о прямой линіи непремѣнно соединяетъ туго-натянутый снуръ или веревку, съ понятіемъ о плоскости — тонкій листъ бумаги, съ поня-

тіемъ о числѣ—извѣстное собраніе однородныхъ предметовъ, чаще всего тѣхъ, которые ближе къ нему, и проч. и проч. Переходъ отъ *конкретнаго* къ *отвлеченному*, который обыкновенно забывается человѣкомъ, когда онъ достигаетъ полнаго развитія, совершается при всякомъ знаніи медленно и всегда бываетъ пропорціоналенъ возрасту, степени умственнаго развитія и количеству пріобрѣтенныхъ познаній. Строго обдуманная педагогическая метода преподаванія можетъ ускорить этотъ переходъ, но непозволительныхъ скачковъ дѣлать все-таки не можетъ, изъ опасенія идти на перекоръ естественному ходу развитія духа человѣческаго.

То, что примѣчается въ каждомъ человѣкѣ по мѣрѣ его возрастанія, происходило нѣкогда и съ цѣлымъ человѣчествомъ, когда оно пребывало въ своемъ дѣтствѣ. Исторія математики свидѣтельствуетъ, что *основныя понятія* о числѣ и измѣреніи протяженностей были извѣстны людямъ въ самой глубокой древности, еще можно сказать въ младенческомъ состояніи обществъ; но эти понятія были опять чисто конкретныя. Твореніе Эвклида доказываетъ уже извѣстную степень возмужалости человѣчества, и прежде, чѣмъ этотъ замѣчательный мужъ подвелъ геометрію подъ извѣстныя начала, истины ея, разсѣянныя повсюду и прямо выведенныя изъ наблюденій и опытовъ, уже давно были примѣняемы человѣкомъ къ разнымъ потребностямъ его быта. Такъ, напримѣръ, раздѣленіе земель и возобновленіе прежнихъ межъ послѣ разлитія Нила, когда эта рѣка снова входила въ берега свои, привели Египтянъ, за долго еще до Эвклида, къ открытію многихъ геометрическихъ теоремъ. Наконецъ, и самый Эвклидъ сдѣлалъ только то, что могъ сдѣлать вообще древній человѣкъ, соотвѣтственно степени своего знакомства съ природою и жизнію вообще. Твореніе Эвклида, разсматриваемое какъ общее выраженіе понятій древнихъ объ ученіи о пространствѣ, все-таки есть частность сравнительно съ открытіемъ Декарта, который далъ математикѣ такіе огромные размѣры. Только съ Декарта эта отрасль знаній получаетъ характеръ общій (аналитическій); но до него, и это неоспоримо, она имѣла характеръ частный, спеціальный, и заключалась вся въ *конкретномъ*, разсматривая здѣсь это слово въ самомъ обширномъ его значеніи.

Такимъ образомъ, если и непосредственныя наблюденія надъ развитіемъ ума и самая исторія науки говорятъ намъ одно и тоже, то раціональной методѣ преподаванія математики остается только подмѣтить законы такого общаго развитія и сообразно съ ними начер-

тать самую программу. Она тогда, во-первыхъ, будетъ слѣдовать естественному порядку вещей; не станетъ насиловать дѣтской природы, а только возбуждать ее къ дальнѣйшему самобытному развитію; во-вторыхъ, водворитъ надлежащее единство и согласіе въ преподаваніи первоначальной математики съ прочими предметами обученія, что становится въ новѣйшее время дѣломъ крайней важности, по множеству предметовъ, которымъ нынѣ обучаютъ одновременно и дѣтство и юношество.

Раздѣливъ весь курсъ математики, который можно допустить въ самомъ обширномъ объемѣ для среднихъ учебныхъ заведеній, или для общаго образованія, на двѣ главныя части, а именно: часть *конкретную* (Ариѳметику и Первоначальную Геометрію) и часть *аналитическую* (Алгебру и Аналитическую Геометрію, по-крайней-мѣрѣ двухъ размѣреній), мы предполагаемъ заняться въ предлежащемъ конспектѣ только первою, т. е. конкретною частію, и на основаніи вышесказаннаго, подробному изложенію ея, какъ самой важной въ преподаваніи, предпосылаемъ слѣдующія общія условія, которымъ это изложеніе необходимо должно удовлетворять.

I. Наука при своемъ источникѣ—а потому въ передачѣ ея дѣтскому уму, который, въ отдѣльности разсматриваемый, усвоиваетъ ее себѣ точно также, какъ усвоивало и младенчествующее человѣчество,—находится въ тѣсной связи съ жизнію.

Она отдѣляется отъ жизни и входитъ въ область отвлеченія не вдругъ, а съ возможною постепенностію. Сперва обозначаются въ ней болѣе выпуклыя, рѣзкія черты, имѣющія наибольшее приложеніе къ жизни, а потомъ уже ея частности и подробности, способныя занимать только развитый разумъ. Отсюда необходимо, чтобы теорія развивалась подобно тѣмъ концентрическимъ кругамъ, которые примѣчаемъ на спокойной поверхности воды въ то время, когда косвенно прорѣзываетъ ее брошенный издали камышекъ. Такимъ образомъ, отвлеченнымъ опредѣленіямъ и общимъ правиламъ должно предшествовать практическое умѣнье производить самое дѣло, изъ котораго потомъ, посредствомъ многократнаго разложенія и обобщенія, эти опредѣленія и эти правила и могутъ возникнуть въ дѣтскомъ умѣ въ надлежащей полнотѣ и ясности. Въ ариѳметикѣ, напримѣръ, дитя лишь только тогда основательно пойметъ значеніе этой науки, содержаніе и объемъ ея, со всѣми категорическими опредѣленіями числа, единицы, дроби и пр., когда оно легко и свободно будетъ производить самыя выкладки надъ разнаго рода числами. Слѣдовательно, правильнѣе и

согласнѣе съ ходомъ развитія, чтобъ опредѣленіями оканчивать, а не съ нихъ начинать науку о числахъ. Тоже самое должно сказать по первоначальной геометріи, которая еще болѣе, чѣмъ ариѳметика, подлежитъ внѣшней наглядности.

II. Наука подчиняется двумъ требованіямъ: она должна представить собою, во-первыхъ, отдѣльную совокупность знаній, полезныхъ въ общежитіи, во-вторыхъ, непрерывный рядъ истинъ, ведущій къ полному сознанію опредѣленной, общей, міровой идеи, которую она себѣ отмежевываетъ и надъ разработкою которой разумъ не только развивается, но и достигаетъ высшаго своего проявленія.

Эта двойственность цѣли исключаетъ въ преподаваніи всякое одностороннее воззрѣніе на предметъ науки, опредѣляетъ точное значеніе практики, въ смыслѣ полезнаго, и надлежащее достоинство теоріи, въ смыслѣ разумнаго; вмѣстѣ съ тѣмъ указываетъ на тѣсную и неразрывную связь между теоріею и практикою, изъ которыхъ одна безъ другой существовать не можетъ.

III. Чѣмъ болѣе какая-либо наука, въ началѣ своего проявленія, находится въ связи съ жизнію, тѣмъ болѣе она нуждается въ помощи другихъ знаній, съ нею однородныхъ или къ ней близкихъ.

Такимъ образомъ въ начальномъ преподаваніи. наука объ измѣреніи протяженностей должна быть въ связи съ наукою о числахъ, такъ чтобъ онѣ взаимно другъ друга подкрѣпляли. Вотъ почему и ариѳметика и геометрія, съ самыхъ первыхъ приступовъ въ преподаваніи, должны быть сообщаемы дѣтямъ вмѣстѣ, въ однѣхъ степеняхъ концентрическаго развитія. Линіи и углы, равно и фигуры, складываются, вычитаются одна изъ другой, дѣлятся, однимъ словомъ, приводятся между собою въ разныя отношенія, и эти отношенія тотчасъ же должны быть выражены числами; наоборотъ, числа, напр., вычитаются одно изъ другаго, причемъ остатокъ сравнивается съ вычитаемымъ и уменьшаемымъ, и этого рода сравненія должны быть пояснены на линіяхъ; опредѣляется ли какая-либо дробь, или сравнивается одна часть цѣлаго съ другою, опять линіи, углы или извѣстныя фигуры (какъ, напримѣръ, квадраты) пособятъ учащемуся понять относительную величину этихъ частей, и проч. и проч. Мало этого, въ начальномъ преподаваніи достоинство науки нисколько не пострадаетъ, если для уразумѣнія ученика въ какой-либо изъ ея истинъ, прибѣгнуть сначала къ чисто-нагляднымъ средствамъ; наприм. для опредѣленія прямой линіи—къ туго-натянутому снуру; для доказательства, что всѣ три угла въ треугольникѣ равны

двумъ прямымъ угламъ—къ вырѣзанію изъ бумаги треугольника и къ согнутію всѣхъ трехъ вершинъ его при одной точкѣ, взятой на основаніи, или для доказательства пиѳагоровой теоремы — опять къ вырѣзанію изъ бумаги квадрата и къ перерѣзанію его на нѣсколько частей такъ, чтобъ изъ нихъ можно было сложить два отдѣльные квадрата; равнымъ образомъ, для доказательства того, что параллелепипеды, прямой и наклонный, имѣющіе одинакія основанія и высоты, равны своими объемами, прибѣгнутъ къ колодѣ картъ и проч. Такихъ наглядныхъ средствъ можно пріискать сотни для очевидности доказательствъ многихъ геометрическихъ истинъ. Эти первоначальныя наглядныя средства совершенно согласны съ общимъ ходомъ духовнаго развитія, начинающаго съ чувственнаго, конкретнаго, и оканчивающагося чисто-умственнымъ, отвлеченнымъ. Особенно важно слѣдовать этому правилу въ геометріи, которая прежде всего руководствуетъ насъ *въ самомъ точномъ соображеніи формъ тѣлъ*, т. е. ведетъ къ познанію внѣшнихъ, до пространства касающихся признаковъ вещей.

IV. Но если справедливо, что наука, въ преподаваніи ея дѣтямъ, должна начинаться съ наглядныхъ познаній, то тѣмъ болѣе еще справедливо, что на этихъ познаніяхъ она остановиться не можетъ, не потерявъ своего достоинства, такъ какъ настоящее значеніе ея — служитъ для изслѣдованій разума и высшихъ его проявленій.

Первоначальныя упражненія въ наглядности доставятъ ученику ту существенную выгоду, что онъ будетъ въ состояніи быстро схватывать внѣшнія, до пространства относящіяся явленія; но ими ограничиваться нельзя, такъ какъ отъ науки требуется гораздо болѣе. Въ ней вездѣ, гдѣ только возможно, съ наглядными познаніями соединяются понятія, потому что всякій отдѣльный предметъ долженъ быть подвергаемъ двоякому разсмотрѣнію: и способности наглядности и ума. Отъ ученика требуется, чтобъ онъ не только созерцалъ, но чтобъ созерцаемое изображалъ, понималъ умомъ и размышлялъ надъ нимъ, для выведенія изъ него новыхъ слѣдствій. Вотъ почему не должно останавливаться на частныхъ случаяхъ, а всегда имѣть въ виду общіи законъ, подъ который подходятъ эти частные случаи.

Такимъ образомъ, если сначала мы придаемъ столько значенія нагляднымъ представленіямъ, то потому, что по естественному ходу развитія ума съ нихъ начинается всякое познаніе; но въ геометріи собственно размышленію всегда должно дать преимущество. Во всѣхъ предметахъ, касающихся до области мышленія, первенство всегда

остается за логическимъ началомъ. Вся трудность, какъ видно, состоитъ въ томъ, чтобы не тотчасъ вводить учениковъ въ чистую область отвлеченія, а приближать къ ней постепенно посредствомъ сравнительнаго преподаванія.

V. Наука должна быть постоянно представляема учащемуся въ томъ видѣ, чтобы сдѣлать его способнымъ самому находить и открывать новыя для него истины, какъ необходимыя слѣдствія прежде сознанныхъ уже истинъ.

Не количество одновременно передаваемыхъ истинъ важно, но правильная разсортировка ихъ, различіе между истинами главными и второстепенными и точное подчиненіе однѣхъ другимъ. Пукъ истинъ, составляющихъ необходимую сущность науки, вообще бываетъ не великъ, но зато отличительный признакъ науки есть тотъ, что она обыкновенно богата своею плодовитостію, своими слѣдствіями. Надежно утвердить въ учащемся главныя, существенныя свойства ея, приводя для того въ дѣйствіе не только память, какъ часто случается видѣть, но въ равной степени и воображеніе и разумъ, значитъ снабдить его такими орудіями, помощію которыхъ онъ будетъ потомъ въ состояніи самъ собою доходить до свойствъ второстепенныхъ.

Всякая *теорема* выражаетъ собою непремѣнно какое-либо существенное свойство числа или одной изъ трехъ родовъ протяженностей. Свойство это, не будучи само по себѣ очевидно, требуетъ для сознанія его извѣстнаго ряда истинъ, силлогистически связанныхъ между собою, который называютъ *доказательствомъ*. Для очевидности доказательства употребляютъ *построенія*. Но послѣднія чаще всего нужны не столько для убѣжденія въ какомъ-либо существенномъ геометрическомъ свойствѣ, которое нерѣдко обходится даже безъ всякаго построенія (какъ, наприм., свойство: изъ точки, взятой на линіи, можно возставить на эту самую линію только одинъ перпендикуляръ, или: всякую прямую линію можно раздѣлить на сколько угодно равныхъ частей), сколько для того, чтобы сознанное уже свойство исполнить на самомъ дѣлѣ (напр., какъ именно возставить на данную линію, изъ данной на ней точки, перпендикуляръ, или, какъ раздѣлить линію на 2, 3, 4 и пр. равныхъ частей, и т. д.),— что и составляетъ предметъ *задачи*, требующей, какъ извѣстно, *рѣшенія*. Для возбужденія самодѣятельности въ учащихся чрезвычайно важно, чтобъ они привыкали съ раннихъ поръ различать теоремы отъ задачъ, изъ которыхъ первыя должны быть имъ сообщены, а до

рѣшенія вторыхъ они должны непремѣнно доходить сами. Эта раздѣльность часто, къ сожалѣнію, упускается изъ вида въ преподаваніи, отчего и происходитъ то, что ученикъ привыкаетъ смотрѣть на всякое новое предложеніе, какъ на истину, для него недоступную безъ помощи учителя, а эта привычка окончательно парализируетъ въ немъ всякую самодѣятельность. Если уже нужно пособлять ученику, то пусть эти пособія ограничатся со стороны учителя только вопросами, служащими къ напоминанію тѣхъ теоремъ, которыя прилагаются къ рѣшенію данной задачи; но объяснять ему, отъ начала до конца, всю задачу значитъ убивать въ немъ всякую самодѣятельность.

Этихъ условій достаточно, по нашему мнѣнію, для прогрессивнаго начертанія плана преподаванія Первоначальной Математики, чѣмъ мы теперь и займемся.

I. Ариѳметика.

Вся ариѳметика собственно заключается въ слѣдующихъ четырехъ дѣйствіяхъ: *сложеніи*, *вычитаніи*, *умноженіи* и *дѣленіи*. Имъ предшествуетъ *счисленіе*, или *нумерація*. Эти дѣйствія производятся надъ числами, которыя бываютъ *цѣлыя* и *дробныя*. Какъ тѣ, такъ и другія раздѣляютъ еще на *отвлеченныя*, или *простыя*, и *конкретныя*, или *именованныя*; наконецъ послѣднія—на *числа одного наименованія* и числа *разнаго наименованія*, или *составныя*. И здѣсь предѣлъ ариѳметики: все прочее, что обыкновенно относятъ къ ней, не составляетъ особой теоріи, но есть приложеніе тѣхъ же самыхъ правилъ и законовъ къ разнымъ потребностямъ жизни. Такъ называемыя *тройныя правила* (простое, сложное, товарищества, смѣшенія вещей и цѣнное) не требуютъ ни другихъ началъ, ни другихъ операцій. Задачи этого рода не только рѣшаются, но и должны рѣшаться помощію тѣхъ же основныхъ дѣйствій, чрезъ приведеніе данныхъ отношеній къ единицѣ, а не посредствомъ пропорцій, которыя вовсе неумѣстны въ ариѳметикѣ. Къ тому же, такой способъ рѣшенія задачъ, т. е. чрезъ приведеніе данныхъ отношеній къ единицѣ, облегчитъ впослѣдствіи учащимся переходъ отъ ариѳметики къ первоначальной алгебрѣ и уже заранѣе приведетъ ихъ къ предугадыванію общности пріемовъ послѣдней.

Очевидно, что надобно начать дѣло съ *счисленія*, однакожь не должно останавливаться на изслѣдованіи этого предмета до тѣхъ

поръ, пока онъ совершенно истощится; напротивъ, важнѣе всего и сообразнѣе съ дѣтскимъ развитіемъ, дать сколь возможно ранѣе эскизъ всей ариѳметики. Такъ, чтобы идти *въ наукѣ всегда параллельно* съ силами учащихся, слѣдуетъ научить ихъ сперва считать и изображать цифрами только числа отъ *одного* до *десяти*, *потомъ* тотчасъ перейдти къ сложенію и вычитанію этихъ чиселъ, къ разложенію или раздѣленію ихъ на равныя и неравныя части, словомъ, сдѣлать надъ ними разнаго рода сравненія, причемъ не упустить также случая сообщить имъ понятіе и о дробяхъ, сколько позволяютъ предѣлы первыхъ десяти чиселъ. Такимъ образомъ будетъ сначала пройдено мало, но пройдено цѣлое; учащіеся вдругъ ознакомятся съ сущностію изучаемаго предмета, и идея науки, хотя темно, однакожь все-таки проявится имъ.

Подвергнувъ исчисленіямъ всѣ числа отъ *одного* до *десяти*, должно будетъ перейдти во вторую степень (во второй концентрическій кругъ) и разсмотрѣть также съ разныхъ точекъ зрѣнія всѣ числа отъ *одного* до *ста*. Здѣсь уже представляется бо́льшій просторъ: частные пріемы получаютъ опредѣленность, правила обобщаются и самые законы чиселъ начинаютъ яснѣе проявляться. Послѣ этого третья степень (новый концентрическій кругъ), гдѣ трактуется о всѣхъ возможныхъ числахъ, какъ бы велики они ни были, не представитъ особой трудности для учащихся: они поймутъ, что здѣсь дѣло идетъ только о повтореніи и дальнѣйшемъ развитіи того, что имъ уже хорошо извѣстно изъ прежнихъ занятій. Дѣйствительно, дальнѣйшія ариѳметическія выкладки надъ большими числами отличаются отъ первоначальныхъ выкладокъ надъ числами малыми только своею сложностію, но не особою теоріею. Вся сила состоитъ въ умѣньи *сокращать*; отсюда и получили начало нѣкоторые частные пріемы и правила. Впрочемъ число послѣднихъ должно быть ограничено, и не слѣдуетъ въ ариѳметику, преподаваемую дѣтямъ, вводить подробныя общія изслѣдованія о первыхъ числахъ, о нахожденіи наибольшаго дѣлителя двухъ или болѣе чиселъ, или о дѣлимости чиселъ, что прилично можетъ занимать возрастныхъ воспитанниковъ, и то только по ознакомленіи ихъ съ алгеброю, когда снова должно будетъ повторить съ ними курсъ ариѳметики, разсматривая ее вообще какъ частный случай науки исчисленія. Тѣмъ менѣе пропорціи, извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней должны входить въ составъ курса первоначальной ариѳметики; для частныхъ примѣненій этого рода вопросовъ настоящее мѣсто въ геометріи.

Такой ходъ преподаванія, выведенный прямо изъ наблюденій надъ постепеннымъ развитіемъ ума, условливаетъ многократное повтореніе изученныхъ свойствъ или дѣйствій науки, но повтореніе не однообразное, которое обыкновенно наскучаетъ дѣтямъ и усыпляетъ ихъ умственную дѣятельность, а всякій разъ вмѣщающее въ себѣ большій кругъ обзора съ пріобщеніемъ много новаго, что находится впрочемъ въ непосредственной связи съ пройденнымъ, или прямо вытекаетъ изъ него. Время употребится тоже, какое употребляется на частое, голословное повтореніе пройденнаго, но результатъ конечно будетъ не тотъ: ибо ученикъ, при всякомъ новомъ повтореніи, ставится здѣсь въ различное положеніе и отъ него все болѣе и болѣе требуется. Съ другой стороны этотъ ходъ ученія какъ нельзя лучше будетъ соотвѣтствовать и съ разными степенями возраста воспитанниковъ, въ переходѣ развитія вообще отъ внѣшней природы къ внутренней.

Но сюда слѣдуетъ отнести два важныя замѣчанія, которыя никогда не должно терять изъ вида. Если старинная метода преподаванія ариѳметики, существовавшая въ школахъ до Песталоцци, слишкомъ утомляла учениковъ и усыпляла ихъ умственныя способности механическими выкладками надъ большими числами, то и самъ Песталоцци и его послѣдователи впали въ другую крайность: они придали такъ-называемымъ изустнымъ исчисленіямъ (головнымъ счетамъ) слишкомъ большую важность, оставивъ въ пренебреженіи цифровое письмо, и такимъ образомъ вмѣсто того, чтобы тѣснѣе связать оба рода исчисленій надъ числами, изустно и цифрами, разрознили ихъ чрезъ введеніе многихъ лишнихъ пріемовъ. Надобно стараться избѣгать этой знаменательной ошибки. Пріемы должны быть совершенно одинаковы, какъ для исчисленій цифрами, такъ для головныхъ счетовъ; иначе это только будетъ сбивать учениковъ. Уже въ первой степени, при исчисленіи самыми малыми числами, должно употреблять цифры, такъ чтобы всякая задача была непремѣнно рѣшаема и тѣмъ и другимъ способами; тогда только головные счеты получатъ настоящее свое значеніе и принесутъ ту пользу, какую самъ Песталоцци имѣлъ въ виду, когда вводилъ ихъ въ элементарное преподаваніе.

Не менѣе *заслуживаетъ упоминанія* еще одно замѣчаніе: это привычка нѣкоторыхъ преподавателей задавать ученикамъ, во-первыхъ, слишкомъ сложныя задачи, часто неимѣющія никакого приложенія къ жизни, во-вторыхъ, такъ-называемыя *замысловатыя* задачи, которыя предлагаются, какъ думаютъ, для возбужденія остроумія въ учащихся. И то и другое, нерѣдко, не достигаетъ своей цѣли: задачи слишкомъ

сложныя только затрудняютъ маленькаго, неопытнаго счетовода, а въ классѣ, при множествѣ учениковъ, и самого учителя ставятъ въ невозможность провѣрять работы учениковъ съ надлежащею точностію; задачи замысловатыя переходятъ по бо́льшей части за ту степень силы мышленія, какую можно требовать отъ дѣтей, неспособныхъ вообще къ запутаннымъ комбинаціямъ. Къ чему, *спрашивается*, преждевременно насиловать дѣтскія способности надъ рѣшеніемъ такихъ вопросовъ, которые впослѣдствіи, когда ученики ознакомятся съ алгеброю, не представятъ для нихъ особой трудности? Если бо́льшая часть класса затрудняется рѣшить какой-либо вопросъ, то лучше отложить его до другого времени, нежели настаивать, чтобы дѣти рѣшили его съ большою потерею всегда драгоцѣннаго въ преподаваніи времени. Внимательное наблюденіе доказываетъ, что такого рода задачи рѣшаются въ классѣ обыкновенно немногими учениками, и то только съ помощію учителя; часто помощь эта бываетъ такъ велика, что учитель разскажетъ все рѣшеніе задачи, а ученики затвердятъ это рѣшеніе на-память; сколько же въ такомъ процессѣ выигриваетъ собственно развитіе способностей? Конечно, немного, если вовсе ничего.

Повторяемъ, оба изложенныя здѣсь замѣчанія заслуживаютъ строгаго, тщательнаго вниманія со стороны преподавателя.

На началахъ, здѣсь изложенныхъ, читатель найдетъ во *Второмъ отдѣленіи* предлежащаго конспекта подробное изложеніе хода постепенныхъ занятій учащихся ариѳметикѣ, а въ *Третьемъ* — самые пріемы и указанія, какъ можетъ быть преподано на самомъ дѣлѣ то или другое изъ начертаній программы.

ОТДѢЛЕНІЕ II.

СОБСТВЕННО ПОДРОБНАЯ ПРОГРАММА АРИѲМЕТИКИ, КАКЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ НАЧЕРТАНІЕ ТОГО, ЧТО ИМЕННО МОЖЕТЪ БЫТЬ ПРЕПОДАНО ДѢТЯМЪ.

1. *Дѣйствія надъ числами отъ 1 до 10.*

Счисленіе отъ 1 до 10 посредствомъ чертъ, точекъ (на doскѣ обозначенныхъ) и другихъ видимыхъ предметовъ. — Названіе этихъ чиселъ по мѣсту, занимаемому ими въ ихъ натуральномъ ряду (*порядочныя числа*). — *Сложеніе двухъ и болѣе чиселъ*, которыхъ суммы

не превышаютъ числа десяти. — Вычитаніе, или отнятіе изъ первыхъ 10 чиселъ по одной, двѣ, три и пр. единицы. — Разложеніе чиселъ отъ 1 до 10 на ихъ составныя части (четныя и нечетныя числа). — Первоначальное понятіе о частяхъ единицы (дробныя числа). — Изображеніе первыхъ десяти чиселъ цифрами. — Замѣщеніе цифрами чертъ, точекъ и другихъ видимыхъ предметовъ, употребленныхъ въ предыдущихъ упражненіяхъ. — Ознакомленіе со знаками: *плюсъ* (+), *минусъ* (—), *равенство* (=), *больше* (>) *менье* (<).

Примѣчаніе. Въ Отдѣленіи III, подъ литерою А, помѣщены необходимыя, сюда относящіяся объясненія.

2. Дѣйствія надъ числами отъ 1 до 100.

Изустное и вмѣстѣ наглядное счисленіе отъ 1 до 100. — Изображеніе чиселъ отъ 1 до 100 цифрами. — Сложеніе чиселъ, которыхъ суммы не превышаютъ числа 20. — Вычитаніе, или отнятіе по 2, 3, 4, 5, и болѣе единицъ отъ чиселъ, непревышающихъ числа 20. — Повѣрка вычитанія и сложенія. — Дальнѣйшее сложеніе чиселъ, которыхъ суммы не превышаютъ числа 100. — Сложеніе рядами равныхъ чиселъ (переходъ отъ сложенія къ умноженію). — Общее правило для сложенія, какъ изустнаго такъ и письменнаго. — Понятія о слагаемыхъ и суммѣ (итогѣ). — Вычитаніе чиселъ, когда уменьшаемыя не превышаютъ числа 99. — Вычитаніе рядами равныхъ чиселъ (переходъ отъ вычитанія къ дѣленію). — Общее правило для вычитанія какъ изустнаго такъ и писменнаго. — Понятія объ уменьшаемомъ, вычитаемомъ и остаткѣ (разности), и взаимное сравненіе этого рода чиселъ. — Упражненія въ рѣшеніи сложныхъ примѣровъ, для сложенія и вычитанія вмѣстѣ. — Дальнѣйшее разложеніе чиселъ отъ 1 до 100 на равныя и неравныя числа. — Разностороннее разсматриваніе чиселъ отъ 1 до 100. — Приложеніе къ предыдущимъ исчисленіямъ обыкновенныхъ мѣръ вѣса, длины, денегъ и проч. — Умноженіе чиселъ, которыхъ произведенія не превышаютъ числа 100 (разностороннее изученіе таблицы умноженія). — Соединеніе умноженія съ сложеніемъ, въ сложныхъ примѣрахъ. — Понятія о множимомъ, множителѣ (сомножителяхъ, факторахъ) и произведеніи. — Употребленіе знаковъ умноженія. — Общее правило для умноженія, какъ изустнаго такъ и письменнаго. — Дѣленіе чиселъ отъ 1 до 100. — Соединеніе дѣленія съ сложеніемъ, вычитаніемъ и умноженіемъ, въ сложныхъ примѣрахъ. — Понятія о дѣлимомъ, дѣлителѣ и частномъ. — Употребленіе знаковъ дѣленія. — Общее правило дѣленія, какъ изустнаго

такъ и письменнаго.—Сравненіе дѣленія съ умноженіемъ.—Разсматриваніе всякаго меньшаго числа какъ какой-либо части отъ большаго, съ нимъ однороднаго, въ предѣлахъ 100 (дальнѣйшее развитіе дробей). — Приложеніе къ предыдущимъ исчисленіямъ главнѣйшихъ изъ общеупотребительныхъ мѣръ вѣса, длины, времени и проч. (именованныя числа). — Разностороннее разсматриваніе чиселъ отъ 1 до 100, какъ общее и связное повтореніе всего пройденнаго.

Примѣчаніе. См. въ III-мъ Отдѣленіи приложеніе подъ литерою Б.

3. *Дѣйствія надъ цѣлыми числами вообще.*

а. *Нумерація.* Чтеніе и письмо чиселъ, выраженныхъ тремя и четырьмя цифрами.—Чтеніе и письмо чиселъ, выражаемыхъ пятью, шестью, семью и болѣе цифрами.—Правила для выговариванія большихъ чиселъ. — Различіе французской системы счисленія отъ русской (понятіе о милліардѣ)—Чтеніе и письмо славянскихъ и римскихъ цифръ и сравненіе ихъ съ арабскими.—Упражненія въ времесчисленіи по святцамъ и другимъ церковнымъ книгамъ.

Примѣчаніе. Смот. въ III-мъ Отдѣленіи приложеніе В.

б. *Сложеніе.* Изустное сложеніе, съ соблюденіемъ постепеннаго перехода отъ малыхъ чиселъ къ большимъ.—Письменное сложеніе чиселъ, расположенныхъ столбцами: одночленныхъ, двухчленныхъ, трехчленныхъ и т. д. — Сложеніе длинныхъ столбцевъ чиселъ, помѣщенныхъ на нѣсколькихъ страницахъ, какъ въ приходо-расходныхъ книгахъ и разныхъ счетахъ, съ показаніемъ какъ переносятся частные итоги съ одной страницы на другую и какъ составляется общій итогъ.—Сложеніе чиселъ, расположенныхъ въ горизонтальной строкѣ, съ употребленіемъ знаковъ *плюсъ* и *равно*.—Отдѣльныя правила для письменныхъ сложеній большихъ чиселъ, съ указаніемъ на то, чѣмъ именно они разнствуютъ отъ общаго правила для сложенія, какъ изустнаго такъ и письменнаго.—Опредѣленія сложенія, слагаемыхъ и суммы (итога).—Повѣрка сложенія чрезъ обратное дѣйствіе, когда числа складываются не сверху внизъ, какъ обыкновенно, а снизу вверхъ. — Сложеніе на счетахъ.

Примѣчаніе. Смот. въ III-мъ Отдѣленіи приложеніе Г.

в. *Вычитаніе.* Изустное вычитаніе, съ соблюденіемъ постепеннаго перехода отъ малыхъ чиселъ къ большимъ. — Письменное вычитаніе чиселъ сперва двухчленныхъ, потомъ трехчленныхъ, четырехчленныхъ и т. д., съ слѣдующею притомъ постепенностію: 1) сначала выбираются такія числа, въ которыхъ каждая изъ значащихъ цифръ вычитаемаго

менѣе соотвѣтствующей ей цифры уменьшаемаго; 2) потомъ примѣры, въ которыхъ только нѣкоторыя изъ цифръ вычитаемаго *болѣе* соотвѣтствующихъ имъ цифръ уменьшаемаго; наконецъ 3) когда въ уменьшаемомъ числѣ находятся нули, на концѣ или въ срединѣ. — Примѣры вычитанія чиселъ, расположенныхъ въ горизонтальной строкѣ, съ употребленіемъ знаковъ *минусъ* и *равно.* — Отдѣльныя правила для письменныхъ вычитаній большими числами, съ указаніемъ на то, чѣмъ именно они разнствуютъ отъ общаго правила для вычитанія, какъ изустнаго такъ и письменнаго. — Опредѣленія вычитанія, уменьшаемаго, вычитаемаго, разности или остатка. —Задачи для совокупнаго дѣйствія сложенія и вычитанія. — Вычитаніе на счетахъ.

г. *Умноженіе.* Изустное умноженіе, съ соблюденіемъ постепеннаго перехода отъ малыхъ чиселъ къ большимъ. — Письменное умноженіе многочлена на одночленъ въ слѣдующей постепенности: 1 когда множимое состоитъ изъ однѣхъ значащихъ цифръ; 2 когда въ какомъ-либо разрядѣ множимаго вмѣсто значащей цифры стоитъ *нуль.* — Умноженіе многочлена на многочленъ въ такой послѣдовательности: 1) когда множитель имѣетъ одну значащую цифру, а прочія цифры суть нули; 2) когда во множителѣ болѣе одной значащей цифры; 3) когда множитель имѣетъ одинъ или нѣсколько нулей въ срединѣ. — Сокращенія, употребляемыя при умноженіи. — Правила для письменнаго умноженія большими числами, съ указаніемъ на то, въ чемъ они разнствуютъ отъ общаго правила для умноженія, какъ изустнаго такъ и письменнаго. — Опредѣленія умноженія, множимаго, множителя (сомножителей или факторовъ) и произведенія. — Примѣры для совокупнаго дѣйствія сложенія, вычитанія и умноженія.

Прим. См. въ III-мъ Отд. приложеніе Д.

д. *Дѣленіе.* Изустное дѣленіе, съ соблюденіемъ постепеннаго перехода отъ малыхъ чиселъ къ большимъ. — Письменное дѣленіе. — Различныя формы, въ которыхъ оно располагается, и употребляемые притомъ знаки. — Случаи дѣленія: 1) когда дѣлитель есть одночленъ; 2) когда дѣлимое, или дѣлитель, или оба вмѣстѣ имѣютъ на концѣ нули; 3) когда дѣлимое и дѣлитель суть числа многочленныя. — Разсмотрѣніе всякаго числа, какъ какой-либо опредѣленной части отъ другаго. — Отъискиваніе какой-либо части, напр. $1/2$, $1/3$, $1/4$ и пр., $2/3$, $3/4$, $3/5$, $4/5$ и проч. отъ всякаго цѣлаго числа. — Важнѣйшія сокращенія, употребляемыя при письменномъ дѣленіи большихъ чиселъ. — Правила для письменнаго дѣленія и указаніе на то, чѣмъ оно разн-

ствуетъ отъ общаго правила дѣленія, какъ изустнаго такъ и письменнаго. — Повѣрка дѣленія посредствомъ умноженія и повѣрка умноженія чрезъ дѣленіе. — Опредѣленія дѣленія, дѣлимаго, дѣлителя и частнаго. — Задачи для совокупнаго дѣйствія умноженія и дѣленія, т. е. рѣшеніе посредствомъ приведенія данныхъ отношеній къ единицѣ, въ такихъ задачахъ, которыя причисляются къ такъ-называемымъ *тройнымъ правиламъ*. — Видоизмѣненіе чиселъ. — Объ измѣняемости частнаго, происходящей отъ различныхъ измѣненій дѣлимаго и дѣлителя.

Прим. См. въ III-мъ Отдѣленіи приложеніе Е.

4. *Дѣйствія надъ составными (именованными) числами, разсматриваемыя какъ приложенія предыдущихъ основныхъ дѣйствій къ рѣшенію практическихъ вопросовъ.*

а. *Предварительныя понятія.* Раздѣленіе именованныхъ чиселъ на *числа одинаковаго наименованія* и *числа разнаго наименованія*, или *составныя*. — Показаніе тождественности дѣйствій надъ числами простыми и составными, и обращеніе особаго вниманія учащихся на то, что все различіе послѣднихъ состоитъ въ большей сложности ихъ рѣшенія. — Строгое изученіе подробной таблицы употребительныхъ въ государствѣ мѣры длины, вѣса, времени, бумаги, жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ, а также монетъ. — Таблица главнѣйшихъ иностранныхъ мѣръ, употребляемыхъ въ торговлѣ и сравненіе ихъ съ русскими мѣрами. — Понятіе о *знаменательномъ* числѣ.

б. *Раздробленіе составныхъ чиселъ*, или приведеніе чиселъ бо́льшаго наименованія въ числа ме́ньшаго, того же рода.

в. *Превращеніе составныхъ чиселъ*, или приведеніе чиселъ ме́ньшаго наименованія въ числа бо́льшаго, того же рода.

г. *Сложеніе составныхъ чиселъ.*

д. *Вычитаніе составныхъ чиселъ.* — Задачи, относящіяся къ времесчисленію.

е. *Умноженіе составныхъ чиселъ.*

ж. *Дѣленіе составныхъ чиселъ*, съ соблюденіемъ слѣдующей постепенности: 1) когда дѣлимое есть составное число, а дѣлитель простое; 2) когда дѣлимое и дѣлитель суть составныя однородныя числа. — Опредѣленіе части, какую одно составное число можетъ составлять отъ другаго, съ нимъ однороднаго. — Сложныя задачи.

5. *Дѣйствія надъ простыми дробями вообще.*

О дробяхъ вообще и объ изображеніи ихъ цифрами. — Взаимное

сравненіе дробей и разные роды дробныхъ чиселъ. — Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дробныя выраженія, и обратно. — Различныя исчисленія надъ однородными дробями. — Различныя измѣненія дробей. — Видоизмѣненіе дробей безъ перемѣны ихъ величинъ (приведеніе разнородныхъ дробей въ однородныя, или къ одинакому знаменателю, и сокращеніе дробей). — Сложеніе дробей. — Вычитаніе дробей. — Умноженіе дробей. — Дѣленіе дробей.

Прим. См. въ III-мъ Отдѣленіи приложенія З и И.

6. *Дѣйствія надъ десятичными и непрерывными дробями.*

Счисленіе и изображеніе десятичныхъ дробей. — Измѣненіе величины десятичныхъ дробей, также приведеніе ихъ къ одному знаменателю. — Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей. — Умноженіе десятичныхъ дробей. — Дѣленіе десятичныхъ дробей. — Періодическія десятичныя дроби.

Непрерывныя дроби. — Разложеніе простыхъ несокращаемыхъ дробей въ непрерывныя дроби (или строки). — Опредѣленіе приближенныхъ величинъ.

Примѣч. Изложеніе десятичныхъ дробей послѣ основательнаго изученія простыхъ дробей до того просто, что не считаемъ нужнымъ дѣлать здѣсь какихъ-либо приложеній.

7. *Сложныя задачи, рѣшенія которыхъ обыкновенно относятъ къ такъ-называемымъ тройнымъ правиламъ (простому и сложному, товариществу, цѣпному и смѣшенію вещей).*

Примѣч. См. въ III-мъ Отд. приложеніе І.

8. *Категорическія опредѣленія числа, единицы и самой Ариѳметики, а равно классификація этой науки.*

ОТДѢЛЕНІЕ III.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ПРОГРАММѢ, ОБЪЯСНЯЮЩІЯ КАКЪ ИМЕННО МОЖЕТЪ БЫТЬ ПРЕПОДАНО ТО ИЛИ ДРУГОЕ ИЗЪ НАЧЕРТАНІЙ ПРОГРАММЫ.

Въ предлежащемъ отдѣленіи мы вовсе не намѣрены излагать всего курса ариѳметики, который издается отдѣльно, или держаться строгой системы, а только желаемъ ознакомить читателей съ тѣми пріемами и способами преподаванія, которые, по нашему мнѣнію,

могутъ быть совершенно доступны малолѣтнимъ дѣтямъ. Мы увѣрены, что если только преподаватель вникнетъ въ смыслъ этихъ упражненій, то онъ въ состояніи будетъ вести дѣло далѣе самъ собою и начертать себѣ полную систему обученія науки о числахъ въ духѣ нижеслѣдующихъ отдѣльныхъ приложеній.

Приложение А:

Дѣйствія надъ числами отъ 1 до 10.

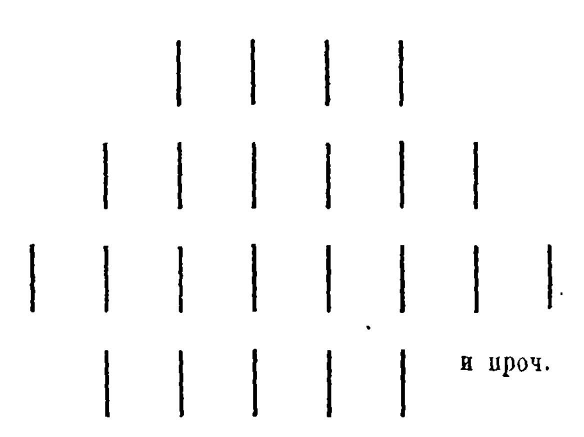
(Разностороннее изученіе чиселъ отъ 1 до 10).

Предметъ этой первой степени исчисленія есть всестороннее изученіе первыхъ десяти натуральныхъ чиселъ. Недостаточно умѣть только пересчитать ихъ въ извѣстномъ порядкѣ, отъ перваго до послѣдняго, или обратно, но надобно подробно разсмотрѣть всѣ отношенія, въ какихъ можетъ быть одно изъ нихъ къ другому. Ученикъ, во-первыхъ, долженъ узнать, какимъ образомъ каждое большее число составляется изъ меньшихъ; во-вторыхъ, на какія составныя части оно можетъ разлагаться, и, въ-третьихъ, какъ одно число увеличивается или уменьшается другимъ. Всего лучше достигнуть этого посредствомъ наглядныхъ представленій. Поэтому, первоначальныя исчисленія должно производить надъ видимыми предметами, преимущественно тѣми, которые находятся предъ глазами учениковъ.

a) Съ помощію видимыхъ знаковъ, напр. точекъ, кружковъ или игральныхъ косточекъ, камышковъ, мелкихъ монетъ, сухихъ бобовъ и проч., преподаватель сперва проходитъ въ прямомъ порядкѣ всѣ числа отъ 1 до 10, и показываетъ постепенное ихъ образованіе, потомъ въ порядкѣ обратномъ и, наконецъ, вразбивку.

Тщательно должно наблюдать, чтобы дѣти всегда давали точные и полные отвѣты; наприм. «*В. Четыре* черточки и *одна* черточка составляютъ сколько черточекъ?» «*О. Четыре* черточки и *одна* черточка составляютъ *пять* черточекъ. «Не надобно допускать, чтобъ они отвѣчали просто: «пять черточекъ» Совершенная опредѣленность и полнота въ отвѣтахъ учениковъ составляютъ въ начальномъ преподаваніи необходимое условіе.

Для удостовѣренія въ томъ, что дѣти не только умѣютъ считать по порядку отъ 1 до 10, но знаютъ всѣ числа вразбивку, преподаватель, написавъ разныя группы черточекъ на доскѣ, напр., сперва 4, потомъ, 6, далѣе 8 черточекъ и проч.



и показывая то на одну, то на другую группу, спрашиваетъ: сколько тутъ? тамъ? здѣсь? и проч.

Чтобъ ученики не примѣняли выученнаго счисленія къ однѣмъ только черточкамъ, можно заставить ихъ считать точки, и при этомъ случаѣ весьма хорошо давать разное положеніе группамъ точекъ, даже одной и той же группѣ. Напримѣръ:

a, ... b, ...
. . . . .

c, ...

d, ...
. . .

e, ...

Такимъ же образомъ можно раскладывать бобы, камешки и проч. Полезно также заставлять самыхъ дѣтей располагать подобныя группы.

Примѣч. Въ особомъ приложеніи, при исчисленіи признаковъ геометрическихъ тѣлъ, представятся новыя средства разнообразить это упражненіе.

Не останавливаясь долго на однѣхъ чертахъ и точкахъ, преподаватель долженъ стараться разнообразить свои упражненія, придавая имъ чрезъ то болѣе живости.

Задачи, которыя составляются для этого, должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

1) Онѣ берутся изъ круга дѣтскихъ занятій.

Онѣ должны быть:

2) точны, справедливы и полны;

3) занимательны, какъ самымъ тономъ разсказа, такъ и своимъ содержаніемъ;

4) разнообразны;

5) нравственнаго и поучительнаго содержанія.

Всегда должно имѣть при этомъ въ виду сословіе, къ которому принадлежатъ ученики, также живутъ ли они въ большомъ городѣ, или въ маломъ или въ деревнѣ. Не менѣе важно постоянно заботиться о развитіи въ нихъ чувства мѣстности и глазомѣра. Вотъ, напримѣръ, какія задачи могутъ быть здѣсь предложены:

а) Сосчитайте, сколько пальцевъ на обѣихъ рукахъ каждаго изъ васъ? Узнайте, много ли стеколъ въ окнѣ, подлѣ котораго вы сидите? Сколько у васъ пальцевъ на правой ногѣ? а на лѣвой? Сколько ножекъ имѣетъ столъ, который стоитъ предъ вами? Какихъ одинакихъ вещей въ этой комнатѣ болѣе одной? Отъ чего корова называется четвероногое живодное? Пѣтухъ тоже четвероногое животное? Сколько рамъ въ каждомъ окнѣ? Сколько угловъ въ этой комнатѣ? Сосчитайте, сколько каждый изъ васъ имѣетъ на своей курткѣ пуговицъ? Много ли въ недѣлѣ дней? Сколько мѣсяцевъ у насъ продолжается обыкновенно зима? Сколько у каждаго человѣка глазъ, носовъ, ушей составовъ на каждомъ пальцѣ? Чего на деревѣ мы видимъ болѣе одного? Сколько копѣекъ въ пятакѣ, грошѣ? Сдѣлайте впередъ три, четыре, пять и проч. шаговъ? Пройдите до дверей и считайте шаги, и проч. и проч.

б) Отсюда преподаватель переходитъ къ *названію чиселъ отъ одного до десяти по мѣсту, занимаемому ими въ ихъ натуральномъ ряду*, т. е. знакомитъ дѣтей съ порядочными числами. И это упражненіе, посредствомъ приличныхъ вопросовъ, можно сдѣлать занимательнымъ для учениковъ.

Цѣль этихъ двухъ упражненій достигнута, если дѣти будутъ въ состояніи:

1) показать *каждый разъ правильную* послѣдовательность численныхъ группъ отъ 1 до 10;

2) безостановочно означать каждую отдѣльно взятую группу, а также изобразить на аспидныхъ доскахъ продиктованную имъ группу чертами или точками;

3) назвать число всякихъ предметовъ, напр. учениковъ, книгъ, грифелей и пр.

4) считать наизусть отъ 1 до 10 впередъ и взадъ, и опредѣлять промежуточныя числа, не прибѣгая уже ни къ какимъ знакамъ.

в) За счисленіемъ чиселъ *отъ 1 до 10*, или за постепеннымъ прикладываніемъ по 1, естественно слѣдуетъ перейдти сперва къ *сложенію двухъ или болье чиселъ, которыхъ суммы не превышаютъ числа десяти*, а потомъ къ *вычитанію или отнятію изъ первыхъ десяти чиселъ по одной, двѣ, три* и пр. *единицъ*.

Прикладывая сперва къ даннымъ числамъ по 2, потомъ по 3 и т. д., преподаватель мало по малу пройдетъ такимъ образомъ всѣ слѣдующіе ряды, которые, для краткости письма, мы означимъ цифрами, хотя здѣсь еще нѣтъ до нихъ дѣла:

a) $1+1=2$	d) $1+2=3$
$2+1=3$	$2+2=4$
$3+1=4$	$3+2=5$
$4+1=5$	$4+2=6$
и проч.	и т. д.
до $9+1=10$	до $8+2=10$
c) $1+3=5$	d) $1+4=5$
$2+3=5$	$2+4=6$
$3+3=6$	$3+4=7$
и т. д.	и т. д.
до $7+3=10$	до $6+4=10$

и проч. и проч.

Но тутъ должно наблюдать:

1) Чтобы дѣти умѣли складывать по этимъ рядамъ не только по порядку, но вразбивку.

2) Чтобы по мѣрѣ *прохожденія* этихъ рядовъ, всегда имѣть въ

виду разнообразныя примѣненія выученнаго къ жизни, посредствомъ занимательныхъ задачъ.

За сложеніемъ по 2 числа слѣдуетъ сложеніе по 3 числа вмѣстѣ, при томъ же условіи, чтобы получаемыя суммы не превышали числа 10.

Здѣсь кстати предварительно ознакомить дѣтей съ перестановкою чиселъ, и показать имъ, что какъ бы ни были переставлены числа, данныя для сложенія, и съ какого бы числа ни начинали складывать, всегда выйдетъ одна и таже сумма.

Примѣръ.

Одинъ,	*два*	и	*три*	составляютъ	*шесть;*
Одинъ,	*три*	и	*два*	—	*шесть;*
Два,	*одинъ*	и	*три*	—	*шесть;*
Два,	*три*	и	*одинъ*	—	*шесть;*
Три,	*два*	и	*одинъ*	—	*шесть;*
Три,	*одинъ*	и	*два*	—	*шесть;*

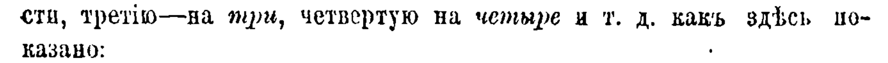
Въ вычитаніи наблюдается, во-первыхъ, таже постепенность, во-вторыхъ, тоже разнообразіе въ пріемахъ и задачахъ, какъ и въ сложеніи.

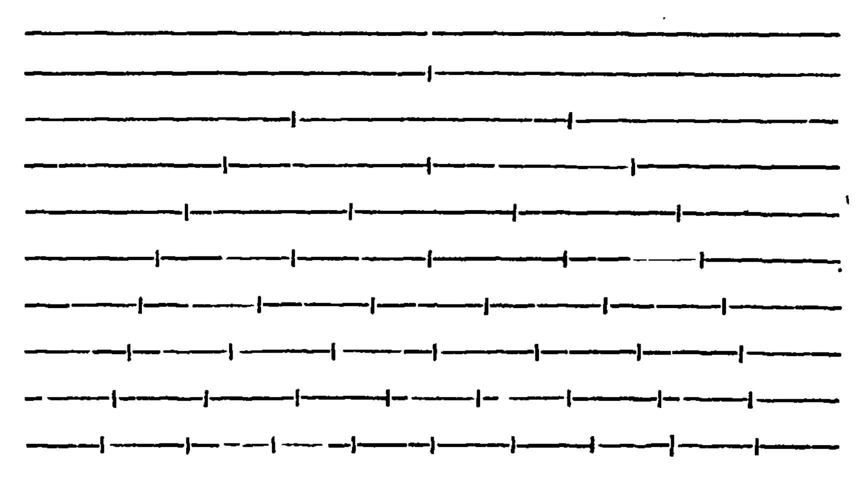
г) Разложеніе чиселъ отъ 1 до 10 на ихъ составныя части, находясь въ тѣсной связи съ предыдущими упражненіями, упрочиваетъ въ ученикахъ знаніе началъ сложенія и вычитанія, а вмѣстѣ служитъ весьма важнымъ приготовительнымъ упражненіемъ и для двухъ прочихъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Указывая на разныя группы черточекъ, сперва меньшія, преподаватель каждый разъ спрашиваетъ учениковъ изъ какихъ составныхъ частей состоитъ каждая группа; напр., три состоитъ изъ двухъ и одной, девять можно разложить на 8 и 1, или 7 и 2, 6 и 3, 5 или 4 и проч. и проч. Отсюда ученики узнаютъ, что числа можно разлагать на *равныя* (четныя) и *неравныя* (нечетныя) числа меньшія.

д) Послѣ разложенія, или дѣленія чиселъ на части, состоящія изъ однихъ цѣлыхъ, естественно рождается вопросъ: какъ раздѣлить *единицу* на двѣ, три, четыре и болѣе равныхъ частей? Это приводитъ къ понятію о дробяхъ.

Для большей наглядности изученія первоначальныхъ дробныхъ чиселъ, преподаватель чертитъ на доскѣ десять равныхъ горизонтальныхъ чертъ, и вторую изъ нихъ раздѣляетъ на *двѣ* равныя ча-


сти, третію—на *три*, четвертую на *четыре* и т. д. какъ здѣсь показано:

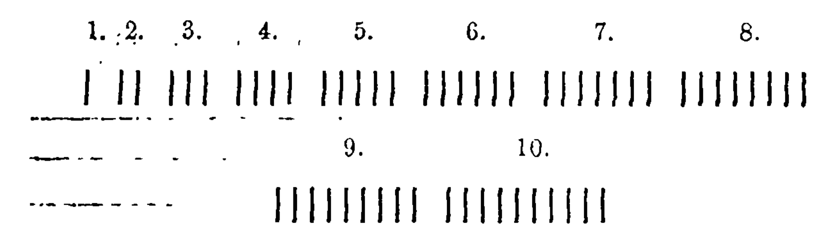


и потомъ спрашиваетъ: сколько цѣлое имѣетъ половинъ, третей, четвертей и проч.?—Сколько половинъ, третей, четвертей и проч. должно совокупить, каждыя особо, чтобы получить опять цѣлое? — Которыя изъ частей болѣе и почему: треть или половина, пятая или седьмая и проч.?—Только ли черты можно дѣлить такимъ образомъ? Почему три четверти менѣе четырехъ пятыхъ, или пять седьмыхъ менѣе осьми девятыхъ и проч.?—Есть ли разница между половиною, двумя четвертями, тремя шестыми, четырьмя осьмыми, пятью десятыми? — Почему?—и проч. и проч.

е) Изображеніе первыхъ десяти чиселъ цифрами.

Преподаватель, имѣя въ виду познакомить дѣтей съ употребленіемъ цифръ, не долженъ, на первый разъ, входить въ дальнія объясненія о пользѣ этихъ знаковъ предъ прочими, о сравненіи ихъ съ римскими цифрами, о постепенномъ измѣненіи, которое онѣ потерпѣли во времени и пр. и пр.; достаточно, если онъ скажетъ, что цифры суть обще-принятые знаки для изображенія чиселъ; знаки эти называются арабскими, по причинѣ изобрѣтенія ихъ арабами (аравитянами), и впервые были употреблены итальянцами, и служатъ почти тѣмъ же для чиселъ, чѣмъ ноты для музыкальныхъ звуковъ и буквы для словъ.

Преподаватель, изобразивъ черточками весь рядъ чиселъ, отъ 1 до 10, пишетъ надъ каждою *отдѣльною группою* соотвѣтствующую ей цифру, т. е.



и таким образомъ, посредствомъ частныхъ вопросовъ, знакомитъ учениковъ постепенно съ первыми десятью цифрами.

Нельзя забывать, что цифровое письмо довольно трудно для дѣтей, которыя еще слабы въ грамотѣ. Если они едва пишутъ буквы, то было бы несправедливо требовать отъ нихъ, чтобы послѣ двухъ, трехъ уроковъ они могли писать цифры четко и красиво.

Здѣсь должно держаться правила, чтобъ ученики писали цифры сколь возможно крупнѣе, хотя новички, отъ робости или чего другаго, пишутъ обыкновенно слишкомъ мелко.

ж) Послѣ этого, преподаватель, обратясь снова къ пройденному, заставляетъ дѣтей производить прежнія исчисленія вмѣсто черть цифрами, и тутъ же знакомитъ ихъ съ употребленіемъ знаковъ: плюса (+) минуса (—) и равно (=), также съ знакомъ умноженія (× или ·). Отъ этого постепенно изобразятся на аспидныхъ доскахъ дѣтей слѣдующіе ряды:

(Для сложенія)

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4
1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9
1 + 7 = 8	2 + 7 = 9	3 + 7 = 10
1 + 8 = 9	2 + 8 = 10	и т. д.
1 + 9 = 10		

Наконецъ, 9 + 1 = 10

Всѣ эти ряды прочитываются учениками вслухъ, *по порядку* и *вразбивку*.

(Для вычитанія)

1 — 1 = 0	2 — 1 = 1	3 — 1 = 2
2 — 2 = 0	3 — 2 = 1	4 — 2 = 2
3 — 3 = 0	4 — 3 = 1	5 — 3 = 2

$4 - 4 = 0$	$5 - 4 = 1$	$6 - 4 = 2$
$5 - 5 = 0$	$6 - 5 = 1$	$7 - 5 = 2$
$6 - 6 = 0$	$7 - 6 = 1$	$8 - 6 = 2$
$7 - 7 = 0$	$8 - 7 = 1$	$9 - 7 = 2$
$8 - 8 = 0$	$9 - 8 = 1$	$10 - 8 = 2$
$9 - 9 = 0$	$10 - 9 = 1$	и т. д.
$10 - 10 = 0$		

(Для разложенія).

$1 = 1$

$2 = 1 + 1$

$3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2$

$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 \times 2.$

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 + 1 = 1 + 4 = 3 + 2 = 2 + 3$
$= 2 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2$

$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 + 1 = 1 + 5 = 1 + 1 + 4 =$
$1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 2 + 4 = 1 + 2 + 3 =$
$2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 2 \times 3$ и пр. и пр.

При прохожденіи такихъ рядовъ, преподаватель безпрестанно обращается къ задачамъ, стараясь, во-первыхъ, сколько возможно разнообразить ихъ содержаніе, во-вторыхъ, соединять въ нихъ то, что прежде разсматривалось отдѣльно.

Теперь, когда ученики ознакомились съ арабскими цифрами, они непремѣнно должны рѣшать предлагаемыя имъ задачи изустно и цифрами; такъ напр., *много-ли получится, если сперва отъ десяти отнять 4, а потомъ къ остатку приложить два? Отв.* получится восемь; ибо *десять безъ четырехъ* составляетъ *шесть*, а *шесть* и *два* равно *осьми*. Цифрами:

$(10 - 4) + 2 = 6 + 2 = 8.$

Еще примѣръ.

Разложить число девять на двѣ неравныя части, а потомъ вычесть изъ большей части меньшую.

Отв. Задача неопредѣленная, потому что число *девять* можно различнымъ образомъ разложить на двѣ неравныя части. Положимъ, что 9 разложено на *семь* и *два;* тогда, по вычитаніи *двухъ* изъ *семи*, получится въ остаткѣ *пять*. Цифрами: $9 = (7 + 2)$; $7 - 2 = 5$.

з. Повтореніе всего пройденнаго.

Взаключеніе этой первой степени, преподаватель можетъ быстро пройдти съ учениками все имъ сообщенное. Лучше всего, если онъ

снова займется каждымъ натуральнымъ числомъ, наблюдая притомъ, во-первыхъ, извѣстный порядокъ, въ которомъ числа одно за другимъ слѣдуютъ, во-вторыхъ, отдѣльное разсматриваніе чиселъ и, въ-третьихъ, отношенія, въ какихъ числа находятся одно къ другому.

Возьмемъ, для примѣра, число *три* и покажемъ какіе можно дать здѣсь вопросы.

Три.

1. Сколько разъ надобно повторить единицу, чтобы получить *три?*

2. Что нужно прибавить къ *двумъ*, чтобы получить *три?*

3. Какъ получится число *три* изъ четырехъ, шести, осьми проч.?

4. На какія меньшія числа разлагается число *три?*

5. Отъ какого числа надобно отнять *три*, чтобы въ остаткѣ вышло *четыре?*

6) Что получится, если всѣ числа, отъ единицы до семи, будутъ увеличены *тремя* единицами?

7) Къ какому числу надобно прибавить *три*, чтобы получить девять?

8) Въ какомъ числѣ *три* заключается два раза и въ какомъ три раза?

9) Число *три* составляетъ отъ какого числа *половину* и отъ какого *треть?*

Такимъ образомъ поступаютъ и со всѣми прочими числами отъ *одного* до *десяти.*

Цѣль этой первой степени исчисленія — раскрытіе первыхъ и важнѣйшихъ законовъ чиселъ и положеніе прочнаго основанія всему послѣдующему ученію—будетъ достигнута, когда ученики во всѣхъ показанныхъ выше упражненіяхъ будутъ отвѣчать каждый разъ скоро, точно и правильно. Опыты многихъ лѣтъ доказали, что изложенный нами способъ есть лучшій, чтобъ ученики вѣрнѣе усвоили себѣ первыя начала ариѳметики и чтобы преподаваніе своимъ разнообразіемъ сколько возможно болѣе ихъ занимало. Впрочемъ, отнюдь не требуется чтобы преподаватель буквально придерживался всего, здѣсь изложеннаго: пусть онъ измѣнитъ то или другое, смотря по обстоятельствамъ; но лишь бы онъ дѣйствовалъ въ томъ духѣ развитія, который найдетъ въ этихъ упражненіяхъ.

Приложенiе Б.

Дѣйствiя надъ числами отъ 1 до 100.

Въ первой степени мы старались, по возможности, показать всѣ измѣненiя чиселъ, но предѣлы для этого были слишкомъ тѣсны. Здѣсь, во второй степени, всѣ предыдущiя дѣйствiя можно вывести съ бóльшею отчетливостiю и подробностiю.

Учащiеся прежде всего должны научиться считать отъ 1 до 100 не только въ томъ случаѣ, когда эти числа будутъ расположены въ извѣстномъ послѣдовательномъ порядкѣ, но считать и вразбивку, съ точностiю и увѣренностiю. Они должны умѣть также разлагать эти числа на единицы и десятки и, наконецъ, на какiя угодно 2, 3, 4, 5 и болѣе равныя и неравныя частей. Далѣе, вникнуть во всѣ измѣненiя, какимъ эти числа могутъ быть подвергнуты; поэтому знать, какимъ образомъ вообще можно ихъ увеличивать и уменьшать. Но какъ увеличенiе такъ и уменьшенiе бываетъ двухъ родовъ, а именно: число увеличится, если къ нему прибавить другое, и также увеличится, если взять его 2 или болѣе разъ; тоже можно сказать и объ уменьшенiи чиселъ; слѣдовательно, отсюда происходятъ четыре различныя дѣйствiя, которыя суть: *сложенiе*, *вычитанiе*, *умноженiе* и *дѣленiе*. Эти дѣйствiя сперва должны быть разсмотрѣны по одиначкѣ, а потомъ во взаимномъ соединенiи. Большiй просторъ этой степени дастъ возможность разсмотрѣть съ бóльшимъ вниманiемъ и дроби, а въ приложенiяхъ можно уже ознакомить учениковъ съ употребленiемъ различныхъ мѣръ длины. времени, вѣса и пр. (составными числами).

а) Изустное и вмѣстѣ наглядное счисленiе чиселъ отъ 1 до 100.

Сначала всѣ счисленiя производятся изустно надъ разными предметами, которые ближе къ употребленiю дѣтей. Но и здѣсь должно соблюдать постепенность, ограничиваясь сперва только счетомъ десятковъ. Прибавленiе и отнятiе всякiй разъ по одному десятку для дѣтей также легко, какъ и прибавленiе и отнятiе по единицѣ. Нѣсколько труднѣе знакомятся дѣти съ промежуточными числами между 10 и 20, 30 и т. д., и потому надобно особенно остановиться на промежуточныхъ числахъ между первымъ и вторымъ десятками, чтобъ эти числа они усвоили себѣ тверже, и потомъ уже перейдти къ слѣдующимъ промежуточнымъ числамъ. Нелишнимъ считаемъ напомнить здѣсь, что не должно торопиться при прохожденiи чиселъ отъ 1 до

100, но, напротивъ, при каждомъ новомъ десяткѣ непремѣнно надобно останавливаться и дѣлать различныя приложенія; разсматривать соединенія чиселъ съ разныхъ точекъ зрѣнія и, по самой крайней возможности, перемѣнять пріемы, не придерживаясь отнюдь какого либо-одного порядка, чтобы не впасть въ опасный механизмъ. Что такъ легко для взрослыхъ, то часто крайне затрудняетъ дѣтей: только испытаннымъ терпѣніемъ и вмѣстѣ умѣньемъ понижаться до ихъ понятій можно достигнуть прочныхъ успѣховъ.

Вотъ нѣсколько разнообразныхъ вопросовъ, которые сюда относятся:

Сосчитайте 15 страницъ вотъ въ этой книгѣ. — Начните считать съ числа 14 и окончите числомъ 78. — Считайте отъ 1 до 37. — Сколько десятковъ и единицъ въ 95? — Возьмите каждый по кучкѣ бобовъ и узнайте, сколько взялъ каждый изъ васъ. — Выговорите всѣ промежуточныя числа между 19 и 36. — Напишите точками, каждый на своей доскѣ, число 67, размѣстивъ эти точки по десяткамъ. и проч. и проч.

б) Изображеніе чиселъ отъ 1 до 100 цифрами.

При цифровомъ счисленіи главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ ученики различали достоинство каждой цифры по мѣсту, которое она занимаетъ, отъ правой руки къ лѣвой, въ какомъ-либо ряду цифръ. Такъ, напр., ученики здѣсь должны хорошо понимать, что изъ двухъ, одна подлѣ другой написанныхъ цифръ, та, которая стоитъ по лѣвой сторонѣ, изображаетъ десятки. Зная, какимъ образомъ пишется число десять, они безъ труда научатся писать и 20, 30, 40 и пр. Эти такъ-называемыя *круглыя* числа имъ легче изображать, нежели числа, состоящія изъ десятковъ и единицъ, а потому въ изложеніи надобно соблюсти постепенность.

Когда ученики научатся изображать цифрами всѣ числа отъ 1 100, тогда преподаватель необходимо долженъ будетъ обратить вниманіе еще на весьма важное свойство, то есть, что *одньми и тѣми же цифрами можно изобразить разныя числа*. Возьмемъ, наприм., цифры 7 и 9. Посредствомъ этихъ цифръ изображаются два слѣдующія числа: 79 и 97. Въ первомъ числѣ цифра 7 означаетъ десятки, а цифра 9 — единицы, во второмъ же наоборотъ. Этотъ примѣръ показываетъ, что однѣ и тѣже цифры изображаютъ неодинакія числа, и что онѣ получаютъ свое значеніе отъ мѣста, которое занимаютъ въ извѣстномъ ряду.

в) Сложеніе чиселъ, которыхъ суммы не превышаютъ числа десяти.

Здѣсь представляется слѣдующая постепенность:

1) соединеніе чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше десятка;

2) соединеніе единицъ съ числами, превышающими десятокъ. Вообще здѣсь должно обратить вниманіе болѣе на изустное исчисленіе, хотя также нельзя избѣгнуть вовсе и наглядныхъ средствъ, каковы: черточки, точки, бобы и проч.

1. Соединеніе единицъ съ единицами.

Въ первой степени мы видѣли, сколько составляютъ 9 и 1, 8 и 2, 7 и 3 и проч.: теперь можно продолжать это дѣйствіе и считать 9 и 2, 9 и 3, 9 и 5 и т. д.

Примѣръ. Сложить 8 и 4.

Отв. Къ 8 надобно прибавить 2, чтобы вышло 10, а 4 можно разложить на 2 и 2: слѣдовательно 8 и 4 все тоже, что 10 и 2, или 12.

Такимъ образомъ получатся слѣдующіе ряды, которые ученики пишутъ на аспидныхъ доскахъ:

$1+2=3$	$1+3=4$	$1+4=5$
$2+2=4$	$2+3=5$	$2+4=6$
$3+2=5$	$3+3=6$	$3+4=7$
$4+2=6$	$4+3=7$	$4+4=8$
и т. д.	и т. д.	и т. д.
до	до	до
$9+2=11$	$9+3=12$	$9+4=13$

и проч. и проч.

Чтобы преподаваніе не было механическимъ, безпрестанно надобно занимать учениковъ задачами. Причемъ можно держаться слѣдующаго порядка:

1) соединять бо́льшее число съ ме́ньшимъ; напр. $9+3$;

2) соединять ме́ньшее число съ большимъ; напр. $5+8$;

3) соединять одинакія числа; напр., $7+7$;

4) соединять болѣе, нежели два числа вмѣстѣ; напримѣръ, $3+3+1+7$.

Чрезъ упражненіе въ соединеніи чиселъ, изъ которыхъ каждое менѣе десяти, но которыхъ сумма всегда превышаетъ число десять, ученики постепенно дойдутъ до слѣдующаго правила сложенія равно прилагаемаго къ изустному и письменному сложенію:

Одно изъ данныхъ чиселъ должно разложить на 2 такія части, изъ которыхъ первая, будучи приложена къ другому данному числу, составляла бы вмѣстѣ съ нимъ ровно десятокъ, къ которому потомъ надобно прибавить остальную часть разложеннаго числа.

Такъ какъ умноженіе есть сокращенное сложеніе одинакихъ чиселъ, то уже при сложеніи такихъ чиселъ должно приготовлять учениковъ къ умноженію. Такъ, заставляя ихъ складывать числа: 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4 и пр., преподаватель долженъ прибавлять слѣдующія выраженія: 2 и 2, или *дважды два* составляютъ 4; 5 и 5, или *дважды пять* составляютъ 10 и проч.

2. Соединеніе единицъ съ числами, превышающими десятокъ.

Слѣдующіе ряды послужатъ примѣромъ и для всѣхъ прочихъ рядовъ такого рода. Эти ряды проходятся изустно и письменно, съ помощію цифръ.

$10+1=11$	$10+2=12$	$10+3=13$
$11+1=12$	$11+2=13$	$11+3=14$
$12+1=13$	$12+2=14$	$12+3=15$
$13+1=14$	$13+2=15$	$13+3=16$
$14+1=15$	и т. д.	и т. д.
и т. д.	до	до
до	$18+2=20$	$17+3=20$
$19+1=20$		

и проч. и проч.

г) Вычитаніе, или отнятіе по 2, 3, 4 и болѣе единицъ изъ чиселъ, которыя не превышаютъ 20.

Сложеніе и вычитаніе, повидимому, суть два противоположныя одно другому дѣйствія, такъ какъ посредствомъ перваго числа *увеличиваются*, а посредствомъ втораго *уменьшаются*; но не смотря на эту противоположность, они между собою тѣсно соединены. Уменьшить одно число другимъ значитъ тоже, что опредѣлить, сколько къ вычитаемому числу надобно прибавить единицъ, чтобы вышло уменьшаемое; отнять, напр. отъ 7 число 5 все тоже, что узнать, сколько единицъ надобно прибавить къ 5, чтобы получить 7. Такъ поступалъ каждый изъ насъ при первоначальныхъ счетахъ, такъ поступаютъ люди, незнающіе ариѳметики, такъ поступаютъ и дѣти, а потому эту взаимнообразность дѣйствій сложенія и вычитанія никогда не должно терять изъ вида въ преподаваніи.

Вычитая каждое натуральное число изъ другаго, заключающагося между 10 и 20, получатся слѣдующіе ряды:

10 — 1 = 9; 10 — 2 = 8; 10 — 3 = 7; 10 — 4 = 6; 10 — 5 = 5;
10 — 6 = 4; 10 — 7 = 3; 10 — 8 = 2; 10 — 9 = 1; 10 — 10 = 0.
11 — 1 = 10; 11 — 2 = 9; 11 — 3 = 8; 11 — 4 = 7; 11 — 5 = 6;
11 — 4 = 7; и т. д. до 11 — 11 = 0.
12 — 1 = 11; 12 — 2 = 10; 12 — 3 = 9 и т. д. до 12 — 12 = 0.
и проч. и проч.

Самое большое затрудненіе встрѣчають дѣти при вычитаніи такихъ чиселъ, гдѣ число единицъ уменьшаемаго, за исключеніемъ десятка, менѣе числа единицъ вычитаемаго, а потому на такихъ примѣрахъ надобно подолѣе останавливаться.

Примѣръ:

Нѣкто имѣлъ 15 грушъ, изъ которыхъ отдалъ другому 7; сколько у него осталось?

Первый способъ рѣшенія. 15 состоитъ изъ 8 и 7; отнявъ 7, получаю 8.

Второй способъ рѣшенія. Отъ 15 должно отнять 7; но 15 состоитъ изъ 10 и 5, а 7 изъ 5 и 2. Отъ 15 отнявъ 5, получаю 10, а отъ 10 отнявъ 2, получаю 8.

д) Сравненіе чиселъ.

Продолженіемъ предыдущаго упражненія служитъ взаимное *сравненіе чиселъ*, для опредѣленія точнаго отношенія между ними.

Изъ двухъ какихъ-либо данныхъ чиселъ, одно можетъ содержать въ себѣ столько же единицъ, сколько содержитъ въ себѣ другое, и въ такомъ случаѣ *они равны между собою*; если же одно имѣетъ болѣе или менѣе единицъ, нежели другое, то они *неравны между собою*. Если даны два неравныя числа, то чрезъ вычитаніе меньшаго изъ большаго мы всегда узнаемъ, *чѣмъ* одно изъ нихъ болѣе другаго, или обратно. Это-то послѣднее число, показывающее чѣмъ одно число болѣе или менѣе другаго, называется ихъ *разностію*. Поэтому, каждая пара неравныхъ чиселъ имѣетъ какую-либо разность, и двѣ, три и болѣе паръ имѣютъ одинакія разности, когда въ каждой парѣ большее число на одинакое число единицъ превышаетъ меньшее; напр. 4 и 2, 9 и 7, 13 и 11 имѣютъ одинакую разность, именно число 2.

Упражняя дѣтей въ отысканіи разностей между различными па-

рами чиселъ, преподаватель наконецъ обращаетъ ихъ вниманіе на слѣдующія свойства:

1. Изъ двухъ неравныхъ чиселъ одно всегда болѣе другаго.

2. Большее число всегда болѣе меньшаго на разность, которая имѣется между *ними*.

3. Мéньшее число менѣе бóльшаго на столько, сколько единицъ въ разности.

4. Въ большемъ числѣ содержится мéньшее число и разность.

5. Если отъ бóльшаго числа отнять разность, то выйдетъ меньшее; или: чтобы два неравныя числа сдѣлать равными, надобно отъ большаго числа отнять разность.

6. Если отъ бóльшаго числа отнять мéньшее, то останется разность.

7. Когда къ меньшему числу прибавить разность, то выйдетъ большее; или: чтобы два неравныя числа сдѣлать равными, надобно къ мéньшему прибавить разность.

Все это должно быть объяснено посредствомъ наглядности, напримѣръ, на линіяхъ, а также разнообразными задачами. Тутъ должно ознакомить дѣтей съ употребленіемъ знаковъ болѣе (>) и менѣе (<).

e) Дальнѣйшее сложеніе чиселъ, которыхъ суммы не превышаютъ числа 100, а также вычитаніе такихъ чиселъ, которыхъ уменьшаемыя менѣе числа 100.

Послѣ сказаннаго относительно сложенія чиселъ отъ 1 до 10, это упражненіе, какъ продолженіе предыдущаго, не представитъ особой трудности. Важнѣе всего теперь, чтобъ ученики привыкли смотрѣть на десятокъ, какъ на единицу высшаго рода. Пусть они складываютъ сперва десятки съ десятками, потомъ къ числамъ, *выражающимъ* одни десятки, прикладываютъ единицы и, наконецъ, къ числамъ, которыя состоятъ изъ десятковъ и единицъ, прибавляютъ числа того же рода. Труднѣе всего для дѣтей складывать послѣднія числа, т. е. сложныя, и здѣсь должно пріучить ихъ прибѣгать къ разложенію чиселъ на единицы и десятки, и сперва складывать единицы съ единицами, а потомъ десятки съ десятками, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ:

В. Сколько составятъ 45 и 37?

Отв. 82; потому что 45 состоитъ изъ 40 и 5, а 37 изъ 30 и 7;

5 и 7=12, или 1 десятокъ и 2; 1 десятокъ+4 десятка+3 десятка =8 десяткамъ; 8 дес.+2 ед. составляютъ 82.

Послѣ этого, когда остается только достигнуть того, чтобы дѣти научились считать скоро и вѣрно, необходимо самыхъ слабыхъ изъ нихъ задерживать болѣе на различныхъ численныхъ рядахъ, въ видѣ слѣдующихъ:

1) 2 и 2, 4; 4 и 2, 6; 6 и 2, 8; 8 и 2, 10; 10 и 2, 12; 12 и 2, 14, и т. д. до 98 и 2, 100.

2) 3 и 3, 6; 6 и 3, 9; 9 и 3, 12; 12 и 3, 15, и пр. и пр.

При концѣ упражненія, должно показать ученикамъ и тотъ способъ сложенія письменнаго, въ которомъ числа располагаются въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и замѣтить имъ, какія изъ чиселъ называются *слагаемыми*, и что такое *сумма* или *итогъ*.

Напримѣръ, 49+17 выразится такъ:

$$\left.\begin{array}{r}49\\17\end{array}\right\}\text{слагаемыя}$$
$$\overline{66}\ \text{сумма.}$$

Отсюда наконецъ вытекаетъ общее правило, какъ для сложенія изустнаго такъ и письменнаго, именно: *сперва слагаются единицы, и если отъ сложенія ихъ получатся десятокъ или десятки, то послѣдніе прикладываются къ суммѣ десятковъ; общая сумма выразится чрезъ соединеніе суммы десятковъ съ суммою единицъ.*

Очень важно давать ученикамъ такія правила, которыя всегда имѣютъ мѣсто, какъ въ изустномъ такъ и цифровомъ исчисленіи, равно какъ при сложеніи вертикальныхъ и горизонтальныхъ столбцевъ чиселъ. Наука теряетъ свое значеніе, когда заставляютъ дѣтей заучивать правила одностороннія, какъ, напримѣръ, такое, которое обыкновенно помѣщается во всѣхъ руководствахъ ариѳметики, а именно: *чтобы сложить два или болѣе числа, надобно подписать ихъ одно подъ другое такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами и проч.* Очевидно, что это правило не можетъ быть примѣнено къ изустному исчисленію, и потому въ практикѣ должно затруднять дѣтей. Послѣднее правило есть частное и должно быть преподано послѣ общаго, какъ служащее собственно къ облегченію дѣтей при сложеніи вертикальныхъ столбцевъ большихъ чиселъ. Вотъ почему въ курсѣ мы повсюду отдѣляемъ эти общія правила отъ частныхъ, болѣе механическихъ и не всегда пригодныхъ.

При вычитаніи чиселъ должно соблюсти тотъ же постепенный

ходъ дѣйствія, какъ и при сложеніи, имѣя чрезъ то къ виду научить дѣтей дѣйствовать скоро и точно.

ж) Дальнѣйшее разложеніе чиселъ отъ 1 до 100.

Это упражненіе есть продолженіе того, о которомъ было сказано при изложеніи первой степени. Сколь оно важно, въ томъ легко можно удостовѣриться. Но нельзя, и даже нѣтъ необходимости, при такомъ множествѣ чиселъ перебрать всѣ случаи разложенія. Покажемъ здѣсь примѣръ этого упражненія, и попросимъ преподавателя обратить на него особое вниманіе: оно дополняетъ предыдущія дѣйствія и вмѣстѣ приготовляетъ къ послѣдующимъ.

Пусть взято будетъ для разложенія число 15.

15 = 14 + 1;	15 = 12 + 2 + 1;	15 = 10 + 1 + 2 + 2;
13 + 2;	11 + 2 + 2;	9 + 1 + 2 + 3;
12 + 3;	10 + 2 + 3;	8 + 1 + 2 + 4;
11 + 4;	9 + 2 + 4;	7 + 1 + 2 + 5;
10 + 5;	8 + 2 + 5;	6 + 1 + 2 + 6;
9 + 6;	7 + 2 + 6;	
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Эти ряды можно разнообразить такими задачами:

1. Назовите два числа, изъ которыхъ можно составить 18 (также 12, 13, 25, 37 и проч.).

2. Число 26 состоитъ изъ 12, 4 и еще изъ какого третьяго числа?

3. Наименуйте 4 числа, изъ которыхъ можно составить 30 такъ, чтобы 2 изъ нихъ были равныя между собою, а другія два неравныя.

4. Наименуйте 5 неравныхъ чиселъ, изъ которыхъ можно составить число 50.

5. Изъ какихъ шести равныхъ чиселъ состоитъ число 48?

и проч. и проч.

з) Разностороннее разсматриваніе чиселъ.

Это упражненіе есть окончательный выводъ изъ предыдущихъ. Объяснимъ примѣромъ, въ чемъ оно состоитъ. Положимъ, что число 24 должно разсмотрѣть съ разныхъ точекъ зрѣнія.

Вопросы:

1) Къ какому ряду десятковъ принадлежитъ число 24?—(къ 3-му).

2) Которое оно число въ этомъ ряду? — (4-е).

3) Какое число ему предшествуетъ? — (23).

4) Какое слѣдуетъ за нимъ? — (25).

5) Разложите его на десятки и единицы. — (2 д. и 4 ед.).

6) Какимъ другимъ образомъ можетъ составиться число 24? —

(Если сложить 1 съ 23, 2 съ 22, 3 съ 21, 4 съ 20, 5 съ 19 и т. д.).

7) Изъ какихъ трехъ чиселъ можетъ состоять 24? — (15, 5 и 4).

8) Какія три равныя числа составляютъ его? — (8+8+8).

9) Какія четыре равныя числа составляютъ 24? — (6+6+6+6).

10) А какія шесть? — (4+4+4+4+4+4).

11) А какія восемь? — (3+3+3+3+3+3+3+3).

12) А какія двѣнадцать — (2+2+2+2+2+2+2+2+2+ +2+2+2).

13) Какія два числа, вычтенныя одно изъ другаго, составятъ 24? — (6 и 30, 12 и 36 и пр.).

14) Какъ надлежитъ поступить для увеличенія числа 24?

(Должно приложить къ нему какое-нибудь другое число).

15) А какъ уменьшить? —

(Вычитая изъ него меньшее число).

16) Какія числа могутъ быть вычитаемы изъ 24?

(Числа отъ 1 до 24).

17) Когда остатокъ будетъ больше и когда меньше?

18) Сколько должно приложить къ 24, чтобы получить 47, 50, 72 и проч.? —

19) Сколько надобно отнять отъ 24, чтобы получить 12, 16, 4, 9 и проч.? —

20) Какъ составить два равныя числа изъ чиселъ 18 и 6, чтобы сумма ихъ осталась та же, т. е. 24?

Отъ перваго числа отнять 6 и прибавить ко второму).

21) Какія неравныя числа можно получить изъ 12 и 12, которыхъ сумма была бы равна 24? [1]).

и проч. и проч.

---

[1]) Г. Евтушевскій, въ своей методикѣ, упираетъ на то, чтобы всѣ числа, отъ 1 до 100 непремѣнно подлежали, безъ пропусковъ, разностороннему разсмотрѣнію, подобно тому, какъ здѣсь указано о числѣ 24. Но спрашивается: для чего нужно такъ утомлять и учителя и учениковъ? Если на двухъ, трехъ примѣрахъ оказалось бы, что ученики отвѣчаютъ неудовлетворительно, часто ошибаются, то всего проще было бы обратиться къ пройденному и удостовѣриться отъ чего происходятъ ошибки и неловкость въ исчисленіи, чѣмъ на одномъ и томъ же упражненіи дер-

i) *Приложеніе къ предыдущимъ исчисленіямъ обыкновенныхъ мѣръ длины, вѣса, денегъ и проч.*

Прежде всего преподаватель обязанъ познакомить дѣтей съ тѣми мѣрами, которыя они чаще встрѣчаютъ въ жизни. Такъ изъ мѣръ вѣса можно взять только пуды и фунты, а прочія оставить до времени; изъ мѣръ длины можно покамѣстъ выкинуть мили и версты, а ближе познакомить ихъ съ саженью, аршиномъ и футомъ и т. д. Но сообщая дѣтямъ понятія о мѣрахъ непремѣнно надобно указать имъ эти мѣры въ натурѣ и на самомъ дѣлѣ заняться съ ними раз-

---

жать весь классъ въ теченіи нѣсколькихъ мѣсяцевъ. Такое преподаваніе можетъ только надоѣсть до-нельзя ученикамъ. Кстати, я могу здѣсь разсказать подходящій сюда случай, который не выходитъ изъ моей памяти по своей оригинальности. Однажды, это было не такъ давно, я былъ приглашенъ въ одну земскую учительскую школу на публичный экзаменъ. Меня провели въ особый такъ-называемый *образцовый* классъ, гдѣ выпускной воспитанникъ долженъ былъ преподать примѣрный урокъ изъ ариѳметики мальчикамъ отъ 10—12 лѣтняго возраста. Нѣкоторые изъ нихъ показались мнѣ даже старѣе. Директоръ школы сообщилъ мнѣ, что здѣсь строго держатся методы Евтушевскаго и по указанной отъ министерства программы дѣти должны пройти во весь второй годъ только числа отъ 1 до 100. Это меня не мало удивило. Но я былъ еще болѣе удивленъ, когда мнѣ сообщили, что каждое изъ этихъ чиселъ должно быть разносторонно разсмотрѣно учителемъ. Я спросилъ програму; мнѣ отвѣтили, что вся программа заключается въ числѣ 97, которое подлежитъ сегодня всестороннему разсмотрѣнію. Но почему взято это именно число? — мнѣ отвѣтили: всѣ числа отъ 1 до 96 были уже разобраны; сегодня слѣдуетъ 97, а тамъ на три послѣдніе урока до каникулъ останутся числа 98, 99 и 100.

Начался образцовый урокъ. Учитель видимо конфузился. Онъ подходилъ то къ одной, то къ другой высокой партѣ, на которыхъ сидѣли мальчики, и заставлялъ ихъ то разлагать 97 на двойки, тройки и проч., то производить сложеніе и вычитаніе; давалъ небольшія задачи, все только изустно. Одни изъ учениковъ отвѣчали удовлетворительно, другіе мямлили и давали односложныя отвѣты. Иные слушали, а другіе продѣлывали свои дѣлишки, какъ бы до нихъ дѣло вовсе и не относилось. Не полезнѣе ли въ сто разъ было, когда бы ученики, предварительно хорошо ознакомленные съ употребленіемъ цифръ, сами по себѣ, безъ понужденій, писали на своихъ доскахъ всѣ видоизмѣненія данныхъ здѣсь чиселъ? Изъ бѣглаго обзора ихъ работъ, болѣе или менѣе самостоятельныхъ, тотчасъ бы обнаружилось, кто вполнѣ усвоилъ себѣ исполняемыя упражненія, и къ кому, напротивъ, нужно было бы обратиться съ помощію. Что касается до *живаго слова* выпускнаго воспитанника, то тутъ оно оказалось въ большомъ недочетѣ. Только и слышно было: ну! — тише — громче — повтори сказанное еще разъ — сиди прямо и т. д. — Тутъ же я замѣтилъ, что далеко не всѣ упражненія были продѣланы надъ числомъ 97. Память учителю видимо измѣняла, а заглядывать въ книжку казалось ему совѣстно. Неуже-ли, спросилъ я, между всѣми этими мальчиками, принадлежащими къ город-

личными измѣреніями. Для этого необходимо имѣть въ классѣ достаточный запасъ всѣхъ употребительныхъ мѣръ вѣса, длины и пр. При этомъ случаѣ надобно также дать ученикамъ надлежащее понятіе о томъ, что такое сутки, часъ, недѣля, мѣсяцъ, годъ, минута и секунда, и научить ихъ употребленію часовъ.

Числа общеупотребительныхъ мѣръ проще и яснѣе всего научаютъ дѣтей различать достоинство разнаго рода единицъ, къ чему они обыкновенно привыкаютъ медленно, подразумѣвая всегда подъ единицами одинакія и совершенно равныя величины.

Мы не входимъ здѣсь въ подробности исчисленій, потому что они не представляютъ ничего особеннаго.

и) Умноженіе чиселъ, которыхъ произведенія не превышаютъ числа 100.

Цѣль этого упражненія есть всестороннее, сознательное изученіе таблицы умноженія, которая обыкновенно такъ много затрудняетъ дѣтей, особенно когда заставляютъ ихъ выучивать ее наизусть безъ всякихъ предварительныхъ упражненій.

Уже въ предыдущихъ исчисленіяхъ, преимущественно при разложеніи чиселъ, ученики были подготовлены къ сознательному изученію этой таблицы; но еслибъ нашлись между ними такіе, которые и послѣ этого худо усвоивали ее себѣ, то съ ними должно соблюсти

скому сословію, изъ которыхъ нѣкоторые довольно взрослые, не найдется такихъ, которые съумѣли бы сосчитать даже до 1000 и болѣе, а также рѣшать цифрами небольшія задачи въ предѣлахъ чиселъ отъ 1 до 1000? — Навѣрно отвѣчать вамъ не могу, сказалъ учитель; моя обязанность въ этомъ году состояла только въ томъ, чтобъ научить классъ счету отъ 1 до 100, причемъ указано строго придерживаться методикѣ Евтушевскаго: самъ авторъ упираетъ на то, чтобы не было пропущено въ упражненіахъ ни одного числа. Быть же этого не можетъ, возразилъ я, и тутъ же вызвалъ къ себѣ одного мальчика, который мнѣ показался побойчѣе другихъ, и сталъ давать ему разные вопросы на числа въ предѣлахъ отъ 1 до 1000. Мальчикъ на всѣ мои вопросы, не смотря на ихъ разнообразіе, отвѣчалъ бойко, скоро и вѣрно: Ты, мой другъ, этому здѣсь научился? спросилъ я его. Никакъ нѣтъ: я еще прежде поступленія сюда пробылъ два года въ городской приходской школѣ, гдѣ выучился четыремъ правиламъ.

Что метода Евтушевскаго не только болѣзненно дѣйствуетъ на учащихся, нисколько не вліяя на ихъ развитіе, но еще отуманиваетъ и самихъ учителей, вообще крайне мало надѣляемыхъ знаніями, когда имъ, по выпускѣ, приходится занять самостоятельную должность въ сельскихъ школахъ, въ этомъ я имѣлъ много случаевъ удостовѣриться. Лучшіе изъ нихъ мнѣ откровенно сознавались, что имъ приходилось во многомъ переучиваться, чтобъ школьное дѣло пошло какъ слѣдуетъ.

слѣдующую постепенность и употребить въ помощь черточки, точки или другіе знаки.

Изустное и вмѣстѣ наглядное изученіе таблицы умноженія.

Преподаватель проходитъ съ дѣтьми слѣдующіе ряды:

а) Гдѣ, каждое число удвоется:

II			=	1 × II	=	II	(2)
II	+	II	=	2 × II	=	IIII	(4)
III	+	III	=	3 × III	=	IIIIII	(6)

и т. д. до 20.

и этомъ безпрестанно дѣлаются частные вопросы: наприм., сколько составляютъ дважды пять? — 2 + 9? и пр.

б) Гдѣ каждое число утроется:

I	+ I	+ I	=	3 × I	=	III	(3)
II	+ II	+ II	=	3 × II	=	IIIIII	(6)
III	+ III	+ III	=	3 × III	=	IIIIIIIII	(9).

и т. д.

Послѣ этого каждое натуральное число берется сперва четыре, потомъ пять, шесть разъ и т. д. Всѣ эти ряды вмѣстѣ и составятъ таблицу умноженія, которая названа пиѳагоровою, по имени ея изобрѣтателя.

Когда сообщенные дѣтямъ ряды достаточно уяснены посредствомъ отдѣльныхъ вопросовъ и задачъ, тогда надобно стараться, чтобъ они тверже вытвердили ихъ наизусть. Лучше всего, если каждый ученикъ будетъ писать эти самые ряды на своей доскѣ цифрами, и написанное прочитывать по нѣсколько разъ.

Умѣя употреблять уже знаки, ученики будутъ писать такъ:

I.

2 × 1 = 2	3 × 1 = 3	4 × 1 = 4
2 × 2 = 4	3 × 2 = 6	4 × 2 = 8
2 × 3 = 6	3 × 3 = 9	4 × 3 = 12
2 × 4 = 8	3 × 4 = 12	4 × 4 = 16
2 × 5 = 10	3 × 5 = 15	4 × 5 = 20
2 × 6 = 12	3 × 6 = 18	4 × 6 = 24
2 × 7 = 14	3 × 7 = 21	4 × 7 = 28
2 × 8 = 16	3 × 8 = 24	4 × 8 = 32
2 × 9 = 18	3 × 9 = 27	4 × 9 = 36
2 × 10 = 20	3 × 10 = 30	4 × 10 = 40.

и проч. и проч.

Теперь, слѣдуя тому же постепенному ходу дѣйствія, надобно заставлять дѣтей составлять эти ряды въ обратномъ порядкѣ. Вотъ такъ:

II.

1 × 2 = 2	1 × 3 = 3	1 × 4 = 4
2 × 2 = 4	2 × 3 = 6	2 × 4 = 8
3 × 2 = 6	3 × 3 = 9	3 × 4 = 12
4 × 2 = 8	4 × 3 = 12	4 × 4 = 16
5 × 2 = 10	5 × 3 = 15	5 × 4 = 20
6 × 2 = 12	6 × 3 = 18	6 × 4 = 24
7 × 2 = 14	7 × 3 = 21	7 × 4 = 28
8 × 2 = 16	8 × 3 = 24	8 × 4 = 32
9 × 2 = 18	9 × 3 = 27	9 × 4 = 36
10×2 = 20	10×9 = 30	10×4 = 40.

и проч. и проч.

Прямые и обратные ряды приведутъ дѣтей къ убѣжденію, что *произведеніе двухъ чиселъ остается непремѣннымъ, не смотря на ихъ перемѣщеніе.*

Можно распространить эту таблицу на столько, сколько позволяютъ предѣлы числа 100.

Вотъ какіе ряды сюда относятся:

2 × 11,	2 × 12,	2 × 13	и т. д. до	2 × 50 = 100.
3 × 11,	3 × 12,	3 × 13	и т. д. до	3 × 33 = 99.
4 × 11,	4 × 12,	4 × 13	и т, д. до	4 × 25 = 100.
5 × 11,	5 × 12,	5 × 13	и т. д. до	5 × 20 = 100.
6 × 11,	6 × 12,	6 × 13	и т. д. до	6 × 16 = 96.
7 × 11.	7 × 12,	7 × 13	и т. д.	
8 × 11,	8 × 12,			
9 × 11,	9 × 12.			

Дѣти могутъ составлять такіе ряды вмѣстѣ съ рѣшеніями, помощію вопросовъ учителя. Напр.

2 × 11 = 22: потому что 12 = 10 + 2; 2 × 10 = 20; 2 × 1 = 2; 20 + 2 = 22.

5 × 13 = 65; потому что 13 = 10 + 3; 5 × 10 = 50; 5 × 3 = 15; 50 + 15 = 65.

При рѣшеніи различныхъ задачъ, надобно обращать преимущественное вниманіе на скорость самаго рѣшенія. Тутъ также имѣютъ мѣсто сложныя задачи, въ которыхъ умноженіе соединяется съ сложеніемъ и вычитаніемъ.

Числа мѣръ длины, вѣса, времени и проч. даютъ возможность разнообразить примѣненія. И здѣсь также могутъ имѣть мѣсто ряды, подобные слѣдующимъ:

а, 1 годъ имѣетъ 12 мѣсяцевъ,
2 года имѣютъ 2 × 12 или 24 мѣсяца,
3 » » 3 × 12 » 36 »
4 » » 4 × 12 » 48 »
и проч.

1 недѣля имѣетъ 7 дней,
2 недѣли имѣютъ 2 × 7 или 14 дней.
3 » » 3 × 7 » 21 »
4 » » 4 × 7 » 28 »
и т. д.

Можно также бóльшія мѣры обращать въ мéньшія (раздробленіе именованныхъ чиселъ).

Напр. Въ 5 годахъ и 11 мѣсяцевъ, сколько всего мѣсяцевъ?

Рѣшеніе. 1 годъ имѣетъ 12 мѣсяцевъ; поэтому 5 лѣтъ имѣютъ 5 × 12 или 60 мѣсяцевъ; 60 м. + 11 м. = 71 мѣсяцу.

Взаключеніе этого упражненія, преподаватель укажетъ дѣтямъ на порядокъ, соблюдаемый при цифровомъ письмѣ. И здѣсь, какъ въ сложеніи и вычитаніи, дѣйствуютъ двояко: (а) ставятъ сомножителей (факторовъ) въ одинъ горизонтальный рядъ, раздѣляя ихъ знакомъ умноженія (× или ·), за нимъ знакъ равенства, а потомъ произведеніе; или (б) пишутъ сомножителей съ произведеніемъ въ одинъ вертикальный рядъ, отдѣляя первыхъ отъ послѣдняго поперечною чертою:

(а) 5 × 7 = 35.

(б)
$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 7 \\ \hline 35. \end{array}$$

Наименованія: *сомножители* (факторы), *множимое, множитель* и *произведеніе* должны быть объяснены дѣтямъ.

к) Дѣленіе чиселъ отъ 1 до 100.

Какъ умноженіе можно назвать сокращеннымъ сложеніемъ одинакихъ чиселъ, такъ дѣленіе сокращеннымъ или послѣдовательнымъ вычитаніемъ. Поэтому, всего естественнѣе для объясненія дѣленія обратиться къ послѣдовательному вычитанію; то есть, изъ какого-нибудь числа, напр. 8. вычитать послѣдовательно по 2 до тѣхъ поръ, пока ничего не выйдетъ въ остаткѣ; такимъ образомъ окажется, что

2 можно вычитать изъ 8 четыре раза, а это другими словами значить: 2 содержится въ 8 четыре раза.

Чрезъ постепенное дѣйствіе отъ малыхъ чиселъ къ большимъ, здѣсь образуются слѣдующіе *ряды*, которые учениками должны быть означены на аспидныхъ доскахъ посредствомъ цифръ.

а)	2	въ	2	содержится	1	разъ.		
	2	»	3	»	1	»	съ остаткомъ	1.
	2	»	4	»	2	»		
	2	»	5	»	2	»	» »	1.
					и т. д.			
до:	2	»	18	содержится	9	разъ.		
б)	3	»	3	содержится	1	разъ.		
	3	»	4	»	1	»	съ остаткомъ	1.
	3	»	5	»	1	»	» »	2.
	3	»	6	»	2	»		
					и т. д.			
до:	3	»	29	содержится	9	разъ	» »	2.

и проч. и проч.

Достаточно одинъ разъ пройдти эти ряды для усвоенія ихъ учениками. Но здѣсь, какъ и вездѣ, не должно слѣдовать однажды опредѣленному порядку, а также не забывать примѣненій.

При прохожденіи этихъ рядовъ, преподаватель долженъ довести учениковъ до совершеннаго сознанія тождественности выраженій: «*содержится въ*» и «*раздѣлить на*».

Тѣ же самые ряды могутъ получить другой видъ, когда ученики познакомятся съ выраженіями: $^1/_2$, $^1/_3$ и проч. Преподаватель замѣчаетъ имъ, что такъ какъ половина происходитъ отъ раздѣленія единицы на двѣ равныя части, то всего удобнѣе представить ее въ цифрахъ такъ: $^1/_2$, т. е. сперва написать единицу, потомъ провести подъ нею черту, которая будетъ означать слова: «*раздѣленная на*», и подъ этою чертою подписать цифру 2; подобнымъ же образомъ означаются и другія дроби. Кромѣ этого знака дѣленія, употребляемаго болѣе при выраженіи частей цѣлаго, слѣдуетъ ознакомить дѣтей и съ другимъ, а именно съ *двоеточіемъ* (:).

Тогда предыдущія ряды примутъ такой видъ:

а)	$2 : 2 = 1$	б)	$3 : 3 = 1$	в)	$4 : 4 = 1$
	$3 : 2 = 2^1/_2$		$4 : 3 = 1^1/_3$		$5 : 4 = 1^1/_4$
	$4 : 2 = 2$		$5 : 3 = 1^2/_3$		$6 : 4 = 1^2/_4$
	$5 : 2 = 2^1/_2$		$6 : 3 = 2$		$7 : 4 = 1^3/_4$

$6 : 2 = 3$	$7 : 3 = 2^1/_3$	$8 : 4 = 2$
и т. д.	и т. д.	$9 : 4 = 2^1/_4$
до $19 : 2 = 9^1/_2$	до $29 : 3 = 9^2/_3$	и т. д.
		до $39 : 4 = 9^3/_4$

и проч. и проч.

л) Разсматриваніе всякаго меньшаго числа какъ какой-либо части отъ большаго.

Это упражненіе есть продолженіе предыдущаго, какъ дальнѣйшее развитіе дѣленія.

Всякое цѣлое въ отношеніи другаго большаго числа есть только часть его. Такимъ образомъ:

1 есть $^1/_2$ отъ 2	2 есть $^1/_2$ отъ 4
1 » $^1/_3$ отъ 3	2 » $^1/_3$ » 6
1 » $^1/_4$ » 4	2 » $^1/_4$ » 8
1 » $^1/_5$ » 5	2 » $^1/_5$ » 10.

и т. д.

3 есть $^1/_2$ отъ 6	4 есть $^1/_2$ отъ 8
3 » $^1/_3$ » 9	4 » $^1/_3$ » 12
3 » $^1/_4$ » 12	4 » $^1/_4$ » 16
и т. д.	и т. д.

и проч. и проч.

Или:

$^1/_2$ отъ $3 = {}^3/_2$ или $1^1/_2$,	$^1/_3$ отъ $1 = {}^1/_3$
$^1/_2$ » $5 = {}^5/_2$ » $2^1/_2$,	$^1/_3$ » $2 = {}^2/_3$
$^1/_2$ » $7 = {}^7/_2$ » $3^1/_2$,	$^1/_3$ » $3 = 1$
и т. д.	$^1/_3$ » $4 = 1^1/_3$
	и т. д.

По примѣру здѣсь показанныхъ рядовъ нетрудно составить и прочіе.

По соединеніи всѣхъ различныхъ рядовъ, которые сами собою здѣсь представляются, можно составить слѣдующую общую таблицу:

$^1/_2$ отъ 1, 2, 3, 4	до 100.
$^1/_3$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_4$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_5$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_6$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_7$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_8$ » 1, 2, 3, 4	
$^1/_9$ » 1, 2, 3, 4	

Тутъ же преподаватель знакомитъ учениковъ съ обыкновенными и техническими названіями, которыя встрѣчаются при дѣленіи, т. е. *дѣлимымъ*, *дѣлителемъ* и *частнымъ*, а равно и съ размѣщеніемъ этихъ чиселъ.

		дѣлимое.
20 : 4 = 5.	Или:	20 | 4 дѣлитель.
		| 5 частное.

м) Повтореніе всего пройденнаго.

При задачахъ и вопросахъ, сюда относящихся, должно обратить вниманіе учениковъ на разныя формы ихъ, а также и на ихъ рѣшенія.

Задачи и *вопросы*.

а. *На умноженіе*.

1. Что значитъ дважды, трижды, четырежды-взятое какое-либо число?

2. Сколько единицъ составляютъ 4 раза дважды-взятая единица?

3. Чему равно утроенное число 9?

4. Какое число въ 3 раза болѣе 8?

5. Какое произойдетъ число отъ умноженія 7 на 9?

6. Найдти 2 числа, которыя, будучи умножены одно на другое, равнялось бы произведенію 4×5.

б. *На дѣленіе*.

1. Что получу, если раздѣлю 15 на 5 равныхъ частей?

2. Чему равняется 7-я часть отъ 21?

3. Какое число въ 5 разъ менѣе 60?

4. Сколько разъ число 96 содержитъ въ себѣ 12?

5. Наименуйте число, которое составляетъ $^1/_8$ отъ 16.

6. Что дастъ 36, дѣленное на 9?

7. Сколько разъ 2 содержится въ 19?

8. Сколько разъ число 4 можно отнимать отъ 36?

9. Какое число, будучи взято 7 разъ, даетъ 42?

10. Найдите $^1/_7$ отъ 15.

11. Можно ли число 43 раздѣлить на 6 такихъ частей, чтобы въ каждой было по 7?

Сложныя задачи.

а. *Умноженіе съ сложеніемъ*.

1. $5 \times 6 + 4 = ?$

2. $3 \times 4 + 2 \times 3 = ?$

3. $17 + 4 \cdot 2 = ?$

4. $(5+3) \cdot 4 = ?$

б. *Умноженіе съ вычитаніемъ.*

1. $3 \times 9 - 5 = ?$
2. $8 \times 4 - 2 \times 3 = ?$
3. $73 - 4 \times 7 = ?$

в. *Умноженіе съ сложеніемъ и вычитаніемъ.*

1. 4×6 сложенныя съ 9 и безъ 7 единицъ = ?
2. $5 \times 3 + 3 - 2 \times 2 = ?$

г. *Дѣленіе, умноженіе, вычитаніе и сложеніе.*

1. Къ *шестой* части 54 прибавьте 12 и отъ суммы отнимите 3×6.
2. Изъ $^1/_8 \cdot 72$ отнимите 7 и потомъ къ остатку прибавьте 43.
3. $3 \times 6 + {}^1/_5$ отъ $35 = ?$
4. $7 \times 12 - {}^1/_9 \cdot 45 = ?$

д. *Разложеніе чиселъ.*

Примѣръ:

$15 = 3 \times 5$; 5×3; $6 \times 2 + 3$; $7 \times 2 + 1$; $4 \times 3 + 3$; $2 \times 6 + 3$; $2 \times 7 + 1$; $3 \times 3 + 6$; $3 \times 3 + 2 \times 3$; $2 \times 4 + 2 \times 3 + 1$; $1 \times 4 + 1 + 2 \times 5$; $2 \times 4 + 2 \times 2 + 3$; $3 \times 3 + 2 \times 2 + 2$; $2 \times 5 + 2 \times 2 + 1$; $2 \times 2 + 3 \times 4 - 1$; $6 \times 3 - {}^1/_2$ отъ 6; $5 \times 4 - {}^1/_2$ отъ 10.

и т. д.

е. *Приложеніе мѣръ длины, вѣса и пр.*

1. 2 пуда и 5 ф. сколько всего фунтовъ?
2. Въ 99 фунтахъ сколько пудовъ?
3. Въ $^1/_2$ пуда сколько фунтовъ?
4. $^1/_3$ мѣсяца и 8 дней сколько всего дней?

и проч. и проч.

ж. *Разностороннее разсматриваніе чиселъ.*

Послѣ всѣхъ пройденныхъ упражненій, мы въ состояніи теперь разсматривать числа отъ 1 до 100 во всѣхъ возможныхъ и взаимныхъ отношеніяхъ. Возьмемъ то же число 24, которое прежде уже разсматривали.

1. Въ какомъ ряду десятковъ находится число 24?
2. Которое число оно составляетъ въ этомъ ряду?

3 Какое число ему предшествуетъ?

4. Какое слѣдуетъ за нимъ?

5. Разложите его на пары, тройки, четвертки, пятерки.

6. Сколько надобно прибавить къ 7, чтобы вышло 24?

7. Сколько надобно отнять отъ 43, чтобы получить 24?

8. Какъ можно получить это число посредствомъ умноженія?

9. Отъ какого числа 24 составляетъ $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$?

10. На какія равныя части можетъ быть разложено это число?

11. Чему равна $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$ отъ 24?

12. Чему равна $^1/_5$, $^1/_7$, $^1/_9$, $^1/_{11}$ и т. д. отъ 24?

13. Отнимите отъ 24 *двѣ трети*, *три четверти* того же числа.

14. Сравните 24 съ другими числами, напр. 16 и 18, и узнайте, какую часть его они составляютъ.

Отв. $16 = ^2/_3$ отъ 24; $18 = ^3/_4$ отъ 24 и проч. и проч.

Приложеніе В.

Нумерація.

Нельзя требовать отъ дѣтей, чтобъ они, научась считать до ста, тотчасъ могли научиться считать и изображать цифрами большія числа. Здѣсь всего болѣе нуженъ навыкъ, а потому необходимо соблюдать постепенность и нѣсколько останавливаться на каждомъ новомъ разрядѣ цифръ; т. е. сперва брать числа въ три знака, потомъ въ четыре, далѣе въ пять и т. д. Если здѣсь нѣтъ надобности, чтобы преподаватель проходилъ по порядку всѣ ряды, напр. отъ 1 до 1000, то по крайней мѣрѣ, онъ долженъ довести учениковъ до того, чтобъ они скоро и безошибочно отвѣчали на вопросы, подобные слѣдующимъ:

1) Что значитъ четыреста тридцать?

Отв. 1) четыре сотни и *три десятка; 2) сорокъ три десятка; 3) четыреста единицъ* и еще *тридцать единицъ.*

2) Какъ проще можно выговорить число, состоящее изъ *трехъ сотенъ, семи десятковъ* и *девяти единицъ?*

Отв. Триста семьдесятъ девять.

Тотъ же ходъ дѣйствія и въ счисленіи тысячами, съ соблюденіемъ слѣдующей постепенности:

1) чистыя тысячи;

2) тысячи и сотни;

3) тысячи, сотни и десятки;

4) тысячи, сотни, десятки и единицы.

Очевидно, что здѣсь уже теряется внѣшняя наглядность, и потому преподаватель долженъ обратить особое вниманіе на законы составленія различныхъ разрядовъ чиселъ. Ясно также, что по причинѣ множества чиселъ и послѣдовательные ряды не имѣютъ тутъ мѣста. Упражненіе, по необходимости, ограничивается отдѣльными вопросами и задачами.

Отъ выговариванія и изображенія чиселъ, состоящихъ изъ четырехъ цифръ, слѣдуетъ перейти сперва къ пятизначнымъ числамъ, потомъ къ шестизначнымъ и т. д. Впрочемъ нѣтъ надобности тратить много времени надъ счисленіемъ билліонами, трилліонами и проч. Эта игра съ воображаемыми числами въ сущности ничего не прибавляетъ къ знанію ученика.

Преподаватель гораздо благоразумнѣе поступитъ, если, показавъ наконецъ ученикамъ общія правила для облегченія выговариванія большихъ чиселъ, остановится преимущественно на милліонахъ и придастъ болѣе разнообразія упражненію въ счисленіи посредствомъ задачъ, которыя можетъ заимствовать изъ географіи, статистики и другихъ знаній.

Не должно также обременять память учениковъ изъясненіями различныхъ системъ нумераціи, какъ-то: двухзначной, четырехзначной и пр.; лучше познакомить ихъ съ употребленіемъ славянскихъ и римскихъ цифръ.

Приложеніе Г.

Сложеніе и вычитаніе.

Примѣняясь къ ходу упражненій, изложенныхъ для сложенія и вычитанія чиселъ отъ 1 до 100, преподаватель долженъ и здѣсь соблюсти туже постепенность въ переходѣ отъ мéньшихъ чиселъ къ бóльшимъ. Но теперь главное дѣло состоитъ въ усвоеніи законовъ исчисленія, а не въ огромности выводовъ. При большихъ числахъ законы только повторяются, но не измѣняются; почему и надобно болѣе останавливаться на исчисленіи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ, чтобъ ученики научились быстрѣе считать. Ловкость и навыкъ въ вычисленіяхъ — вотъ главныя требованія, которыя имѣются здѣсь въ виду.

При сложеніи и вычитаніи можно иногда разлагать числа на ихъ составныя части, чрезъ что значеніе цифръ по мѣсту, занимаемому ими въ какомъ-либо ряду, дѣлается еще нагляднѣе. Вотъ примѣръ сложенія, который можно представить такъ:

49 =			40 +	9	
679 =		600 +	70 +	9	9000
8002 =	8000	— —	+	2	1800
479 =	—	400 +	70 +	9	260
59 =	—	—	50 +	9	54
8 =	—	—	— +	8	11114
1838 =	1000 +	800 +	30 +	8	
11114 =	9000 +	1800 +	260 +	54	

Здѣсь преподаватель замѣтитъ дѣтямъ, что хотя и съ лѣвой стороны можно начать сложеніе, но если этого не дѣлается, то для избѣжанія лишняго труда.

Полезно иногда заставлять учениковъ слагать числа, расположенныя въ большихъ столбцахъ, также научить ихъ вести приходорасходныя книги, обративъ притомъ вниманіе ихъ и на переносъ суммъ изъ одной страницы на другую. Сложеніе и вычитаніе чиселъ на счетахъ упражненіе весьма важное и въ практической жизни необходимое, а потому сколько-возможно ранѣе надобно пріучать дѣтей употреблять счеты и дѣйствовать ими съ надлежащею легкостію.

Приложеніе Д.

Умноженіе.

И здѣсь, какъ при сложеніи и вычитаніи, должно имѣть въ виду то, что было уже изложено прежде при исчисленіи малыми числами. Равнымъ образомъ изустное исчисленіе также должно предшествовать письменному, какъ и въ предъидущихъ дѣйствіяхъ. Постепенность будетъ заключаться въ слѣдующемъ:

I. Умноженіе чистыми десятками, сотнями и тысячами.

1) Какъ $3 \times 4 = 12$,
такъ 3×4 десят. = 12 дес. = $12 \times 10 = 120$;
3×4 сот. = 12 сот. = $12 \times 100 = 1200$;
3×4 тыс. = 12 тыс. = $12 \times 1000 = 12000$, и т. д.

Примѣры.

Воп. Что составляетъ 5 разъ 60?

Отв. 300; потому что $60 = 6$ дес.; 5×6 дес. $= 30$ дес. $= 300$.

Воп. Сколько получится единицъ, если 600 взять 9 разъ?

Отв. 5400; $600 = 6$ сот.; 9×6 сот. $= 54$ сот. $= 5400$.

2) Если $3 \times 12 = 36$,
то 3×12 дес. $= 36$ дес. $= 360$,
3×12 сот. $= 36$ сот. $= 3600$,
3×12 тыс. $= 36$ тыс. $= 36000$, и т. д.

Примѣръ: $3 \times 170 = ?$

Отв. 510; $170 = 17$ дес.; 3×17 дес. $= 51$ дес. или 510. Или: $170 = 1$ сот. 7 дес.; 3×7 дес. $= 21$ дес. $= 2$ сот. 1 дес.; 3×1 сот. $= 3$ сот.; 3 сот. $+ 2$ сот. $+ 1$ дес. $= 5$ сот. 1 д. $= 510$.

3) Обратно:
если $2 \times 4 = 8$,
то $20 \times 4 = 80$,
$200 \times 4 = 800$,
$2000 \times 4 = 8000$, и т. д.

4) Какъ $20 \times 4 = 80$,
такъ $20 \times 40 = 800$,
$200 \times 40 = 8000$,
$2000 \times 40 = 80000$, и т. д.

5) Если $3 \times 12 = 36$,
то $30 \times 12 = 360$.
$300 \times 12 = 3600$, и т. д.

6) $4 \times 5 = 20$,
$4 \times 500 = 2000$,
$40 \times 500 = 20000$,
$400 \times 500 = 200000$, и т. д.

II. Умноженіе смѣшанныхъ чиселъ.

Примѣры.

1) $6 \times 87 = 522$; потому что $6 \times 7 = 42$,
$6 \times 80 = 480$; $480 + 42 = 522$.

2) $3 \times 760 = 2280$; ибо $3 \times 60 = 180$,
$3 \times 700 = 2100$; $2100 + 180 = 2280$.

3) $9 \times 3472 = 31248$; ибо $9 \times 2 = 18$;

$9 \times 70 = 630$; $630 + 18 = 648$;
$9 \times 400 = 3600$; $3600 + 648 = 4248$;
$9 \times 3000 = 27000$; $27000 + 4248 = 31248$.

4) $12 \times 35 = 420$; $10 \times 35 = 350$, $2 \times 35 = 70$; $350 + 70 = 420$.

5) $24 \times 36 = 864$; $4 \times 36 = 4 \times 30 + 4 \times 6 = 120 + 24 = 144$;
$20 \times 36 = 20 \times 30 + 20 \times 6 = 600 + 120 = 720$;
$720 + 144 = 864$.

6) $16 \times 321 = 5136$; $6 \times 321 = 6 \times 300 + 6 \times 20 + 6 \times 1 =$
$1800 + 120 + 6 = 1926$; $10 \times 321 = 3210$;
$3210 + 1926 = 5136$.

Не должно допускать, чтобы дѣти рѣшали задачи всегда одинакимъ пріемомъ; напротивъ, ихъ надобно доводить до того, чтобъ они, зная нѣсколько способовъ рѣшать одну и туже задачу, избирали всегда тотъ, который удобнѣе и проще при извѣстныхъ условіяхъ предложенной задачи. Покажемъ нѣсколько тому примѣровъ.

a) $8 \times 29 = 232$; $8 \times 20 = 160$; $8 \times 9 = 72$; $160 + 72 = 232$.

b) $8 \times 29 = 8 \times 30 - 8 \times 1 = 240 - 8 = 232$.

c) $29 = 4 \times 7 + 1$; $8 \times 29 = 8 \times 4 \times 7 + 8 \times 1 = 32 \times 7 + 8 =$
$224 + 8 = 232$.

a) $27 \times 40 = 1080$; $20 \times 40 = 800$; $7 \times 40 = 280$; $800 + 280 =$
1080.

b) $27 \times 40 = (30 - 3) \times 40$; $30 \times 40 = 1200$; $3 \times 40 = 120$
$1200 - 120 = 1080$.

c) $27 \times 40 = (6 \times 4 + 3)\, 40$; $6 \times 40 = 240$; $4 \times 240 = 960$;
$3 \times 40 = 120$; $960 + 120 = 1080$.

d) $27 \times 40 = 9 \times 3 \times 40$; $9 \times 40 = 360$; $3 \times 360 = 1080$.

и т. д.

Еслибъ подобные различные способы рѣшенія и не вели къ сокращенному дѣйствію, все-таки не должно ими пренебрегать; потому что они, съ другой стороны, доставляютъ ту великую выгоду, что пріучаютъ ученика къ многостороннему воззрѣнію на числа.

При рѣшеніи практическихъ вопросовъ не должно забывать и чиселъ разнаго наименованія (составныхъ), а именно: приведенія чиселъ бо́льшаго наименованія въ числа ме́ньшаго, а также увеличенія въ нѣсколько разъ какого-либо изъ этихъ чиселъ. Тутъ же должно ознакомить дѣтей и съ полною таблицею мѣръ, употребляемыхъ въ Россіи. Что же касается до тѣхъ иностранныхъ мѣръ, которыя болѣе у насъ употребительны, то объясненіе ихъ и исчисленіе надъ ними лучше отнести къ десятичнымъ дробямъ, такъ какъ въ прак-

тикѣ эти мѣры чаще *выражаются* въ такихъ доляхъ, да сверхъ того только десятичными знаками и можно съ бóльшею точностію опредѣлить *отношенія* ихъ къ русскимъ мѣрамъ.

При письменномъ умноженіи большими числами, надобно также соблюдать постепенность.

1. Когда при многочленномъ множимомъ числѣ множитель состоитъ изъ одной цифры.

Примѣръ исчисленія для бóльшей наглядности:

387	$387 = 300 + 80 + 7$	387
$\times 5$	$300 \times 5 = 1500$	5
1935	$80 \times 5 = 400$	35
	$7 \times 5 = 35$	400
	1935	1500
		1935

2. Когда множитель состоитъ изъ двухъ или болѣе знаковъ.

a) Когда множитель имѣетъ одну значащую цифру, а прочія суть нули.

b) Когда во множителѣ болѣе одной значащей цифры.

c) Когда множитель имѣетъ нули въ срединѣ.

По сообщеніи дѣтямъ общихъ правилъ для умноженія, не должно упустить также изъ виду и сокращеній, какія иногда можно произвести въ выкладкахъ. Вотъ нѣсколько къ тому случаевъ.

1. Когда множитель есть 9.

Съ правой стороны множимаго прибавляется нуль, и изъ этого новаго числа *вычитается* данное множимое; ибо умножить какое-либо *число* на 9 значитъ *тоже*, что изъ десятикратнаго отнять единичное.

$$238 \times 9 = \left\{ \begin{array}{r} 2380 \\ -238 \\ \hline 2142. \end{array} \right.$$

2. Когда множитель есть 11.

Чрезъ умноженіе двухчленнаго числа на 11, получается въ произведеніи трехчленное число, котораго первая цифра таже, что и первая въ данномъ множителѣ, вторая равна суммѣ обѣихъ цифръ того же множимаго (въ томъ случаѣ, когда сумма цифръ множимаго менѣе 9), а послѣдняя цифра таже, что и вторая цифра его.

Такъ $54 \times 11 = 594$.

$$\text{Ибо } 54 \times 11 = \begin{cases} 54 \times 10 \\ 54 \times 1 \end{cases} = \begin{array}{r} 540 \\ 54 \\ \hline 594. \end{array}$$

Но если сумма цифръ множимаго превышаетъ 9, тогда цифра произведенія, означающая сотни, увеличивается на единицу, а среднею цифрою того же произведенія выразится остатокъ, который получится отъ суммы крайнихъ цифръ множимаго, за исключеніемъ десяти.

$$99 \times 11 = 1089 = \begin{cases} 99 \times 10 = 990 \\ 99 \times \ \ 1 = \ \ 99 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \\ \hline 1089 \end{array}$$

3. Когда первая цифра множителя есть 1.

Въ этомъ случаѣ умножаютъ на слѣдующія цифры множителя, начиная съ десятковъ; полученное произведеніе пишутъ подъ множимымъ такъ, чтобы первая цифра множимаго выставлялась впередъ на одинъ знакъ, и потомъ складываютъ всѣ три числа.

$$\begin{array}{r} 2763 \times 431 \\ \hline 8289 \ \ \ \ \ \ \ \ \\ 11052 \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline 1190853. \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

4. Когда множитель не есть первое число, то его можно разложить на своихъ сомножителей и множить на каждаго изъ нихъ порознь.

$$\begin{array}{c} 231 \times 24 \\ \hline 231 \times 6 \\ \hline 1386 \times 4 \\ \hline 5544 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 24 = 6 \times 4 = 3 \times 8 \\ \text{Или } 231 \times 3 \\ \hline 693 \times 8 \\ \hline 5544. \end{array}$$

Хотя такое разложеніе не сокращаетъ собственно дѣйствія, однакожь приноситъ ту пользу, что пріучаетъ ученика смотрѣть на умноженіе съ другой точки зрѣнія, а потому и отдаляетъ всякій механизмъ, который при одномъ и томъ же способѣ легко вкрасться можетъ.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ, которые приняты безъ всякаго дальняго объясненія.

1. 85462 × 124   124 = 5 × 5 × 5 — 1

85462 × 5

427310 × 5

2136550 × 5

10682750
—85462

10597288

2. 583 × 99 = 58300 — 583 = 57717.

3. 634 × 998   998 = 1000 — 2

634000
—1268

732732

4. 4763 × 4999   4999 = 5000 — 1

23815000

23810237

5. 518 × 491   491 = 500 — 9

259000

254338 (вычитаніе 9 × 518 произведено въ умѣ).

и проч. и проч.

Приложеніе Е.

Дѣленіе.

Соображаясь съ изложеннымъ въ предыдущемъ приложеніи объ умноженіи чиселъ, легко и здѣсь соблюсти туже постепенность, какъ при изустномъ такъ и письменномъ исчисленіяхъ. Опыты доказываютъ, что дѣти болѣе всего затрудняются въ томъ, почему въ дѣленія, вопреки прочимъ дѣйствіямъ, они должны бываютъ начинать исчисленіе съ лѣвой руки къ правой, и это затрудненіе надобно отъ нихъ устранить съ первыхъ же пріемовъ.

Положимъ, что требуется 5895 раздѣлить на 5.

Для большей очевидности, можно рѣшеніе этой задачи изложить такъ:

$$5895 = 5000 + 500 + 350 + 45$$

$5000 : 5 = 1000$ или:

$500 : 5 = 100$

$350 : 5 = 70$

$45 : 5 = 9$

1179

```
5|5895 = 1000
 |5000
-----------------
5| 895 =  100
 | 500
-----------------
5| 395 =   70
 | 350
-----------------
5|  45 =    9
           ----
           1179
```

Кратче:

```
5895 : 5 = 1179
5. . .
----------
  8. .
  5. .
----------
  39.
  35
----------
   45
   45
----------
    »
```

NB. Здѣсь точки замѣняютъ нули. *)

---

*) Надобно пріучать учениковъ смотрѣть на математическій знакъ *0* не какъ на *ничто*, въ вулгарномъ смыслѣ, а какъ на дѣйствительный, реальный знакъ, подобно всѣмъ прочимъ цифрамъ. Знакъ *0* иногда означаетъ, что въ такомъ-то разрядѣ цифръ, въ совокупности обозначающемъ какое-либо опредѣленное число, недостаетъ или единицъ, или десятковъ и проч. Нуль, стоящій послѣ какой-либо цифры, показываетъ, что эта цифра увеличена въ десять разъ; наоборотъ, когда онъ поставится впереди значащей цифры, отдѣленный отъ нея запятою, тогда цифру надо читать въ десять разъ уменьшенной по количеству. Иногда нуль означаетъ отсутствіе остатка, когда, напримѣръ, одно число дѣлится нацѣло на другое. Поэтому изобразить такъ, какъ дѣлаютъ иногда сами начинающіе:

```
24 : 3 = 8
24
--
 0  (нѣтъ остатка)
```

во все не есть *безсмыслица*, какъ это угодно было замѣтить моему современному критику («Голосъ» nº 86-й 26 марта 1880 г.). Когда ученикъ понатарѣетъ въ дѣленіи, онъ

Наконецъ дѣти привыкнутъ писать безъ точекъ, и тогда получится слѣдующая форма дѣленія:

```
5895 : 5 = 1179
5
——
 8
 5
——
 39
 35
———
  45
  45
———
  »
```

самъ убѣдится, что, для краткости дѣйствія, обазначеніе нулей въ иныхъ случаяхъ оказывается излишнимъ. Точно такъ и въ умноженіи:

```
    24
  × 305
  ————
   120
   00  (произведенія нѣтъ)
  72
  ————
  7320
```

употребленіе во второмъ ряду двухъ нулей, какъ обозначеніе отсутствія десятковъ въ одномъ изъ произведеній, которыя здѣсь представляются въ смыслѣ слагаемыхъ и безъ которыхъ впослѣдствіи всякій ученикъ обходится, также не безсмыслица. Не надобно забывать, что разстановка цифръ по разрядамъ какъ въ умноженіи, такъ и въ дѣленіи, нерѣдко затрудняетъ дѣтей, и во всѣхъ этихъ случаяхъ употребленіе лишнихъ нулей въ выкладкахъ не должно быть имъ запрещаемо.

При такомъ вулгарномъ понятіи о *нулѣ*, какимъ задался критикъ, всякія дальнѣйшія выраженія, въ ариѳметикѣ и алгебрѣ, могутъ тоже представляться безсмысленными?

Напр.

0, 00001,

или алгебрическое выраженіе: $0/0$.

Желательно былобы знать какъ объяснитъ ученикамъ *почтенный* рецензентъ это послѣднее выраженіе, запасясь предвзятымъ пониманіемъ нуля какъ «ничто»? Пора разстаться съ этимъ *ничто*, такъ какъ изъ ничего ничего и не выходитъ. Даже одинъ изъ нашихъ проповѣдниковъ, рисуя въ своей проповѣди нигилистку, не говоритъ о ней, какъ о «*ничто*», а какъ о «нѣчто» съ коротко обстриженными волосами, въ очкахъ, въ платьѣ безъ хвоста и проч.

А если произвести вычитаніе въ умѣ, то будетъ еще кратче:

5895 : 5 = 1179
39
45
―
›

Примѣч. Къ сокращенной формѣ дѣленія дѣти должны тогда только привыкать, когда они вполнѣ усвоятъ себѣ правила дѣленія.

Еще примѣръ:

Раздѣлить 1672 на 32.

$$1672 = 50 \times 32 + 2 \times 32 + 8 = 1600 + 64 + 8.$$

1600 : 32 = 50
64 : 32 = 2
8 : 32 = $^8/_{32}$
―
$52^8/_{32}$

32 | 1672 = 50
| 1600
―
32 | 72 = 2
| 64
―
23 | 8 = $^8/_{32}$
―
$52^8/_{32}$

Или:

1672 : 32 = $52^8/_{32}$
160
―
72
64
―
8

По прохожденіи дѣленія, преподаватель сообщаетъ дѣтямъ понятія о *дѣлителяхъ*, *общемъ дѣлителѣ* и *общемъ наибольшемъ дѣлителѣ*, ограничивая теорію нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя самымъ необходимымъ, такъ какъ эта теорія имѣетъ мало примѣненій въ обыкновенныхъ ариѳметическихъ выкладкахъ. Дѣйствительно, если, наприм., при исчисленіи дробями, постоянно не опускать изъ вида послѣдовательныхъ сокращеній, то въ результатѣ будутъ получаться дроби въ простѣйшей формѣ. Сложные выводы, большею частію, получаются оттого, что при самыхъ выкладкахъ обыкновенно оставляютъ безъ вниманія сокращенія, относя ихъ къ самому концу дѣйствія.

Приложеніе Ж.

Дѣйствія надъ простыми дробями, выраженными въ малыхъ числахъ.

(Преимущественно изустныя исчисленія).

Дѣйствія надъ дробными числами должны быть изложены съ тою

же постепенностію, какъ и дѣйствія надъ числами цѣлыми. Строгая система изложенія сначала еще неумѣстна: правила должны извлекаться, при помощи наглядныхъ представленій, изъ множества примѣровъ и то только мало по малу.

Для наглядныхъ исчисленій дробными числами съ пользою могутъ служить двѣ таблицы, которыя каждый преподаватель легко для себя составить можетъ. Для составленія первой таблицы возьмите листъ бумаги и разграфите его десятью продольными и столькими же поперечными линіями, чрезъ что получите 100 равныхъ клѣтокъ, или квадратовъ, подобно какъ составляется шашечная доска. Сдѣлавъ это, раздѣлите каждый квадратъ втораго продольнаго ряда на двѣ равныя части поперечными чертами, каждый квадратъ третьяго продольнаго ряда, двумя поперечными чертами на три равныя части, и такъ поступайте до нижняго ряда, чтобы въ немъ каждый квадратъ былъ раздѣленъ поперечными чертами на 10 равныхъ частей *). По этой таблицѣ удобно производить различныя упражненія надъ однородными дробями, т. е. имѣющими одинакихъ знаменателей. Что же касается до исчисленій надъ дробями разнородными, то для этого съ бо́льшею пользою можетъ служить другая таблица, въ которой квадраты, кромѣ поперечныхъ черть, раздѣлены еще чертами продольными, такъ что каждый квадратъ втораго ряда изобразитъ собою четыре равныя части, каждый квадратъ третьяго — девять равныхъ частей и проч. Но еще лучше и нагляднѣе вмѣсто таблицъ употреблять линіи, съ подраздѣленіями ихъ на части.

1. *О дробяхъ вообще и ихъ составныхъ частяхъ.*

Указывая дѣтямъ, въ послѣдовательномъ порядкѣ, сперва на второй, потомъ на третій, далѣе на четвертый и т. д. квадраты перваго поперечнаго ряда таблицы, и спрашивая ихъ, на сколько частей каждый изъ этихъ квадратовъ раздѣленъ, а также въ какомъ отношеніи части ихъ находятся къ цѣлому, легко научить ихъ, *во-первыхъ*, смотрѣть на каждое нераздѣльное количество какъ на *цѣлое*; *во-вторыхъ*, раздѣлять всякое число на 2, 3, 4, 5 и *проч.* равныхъ частей; *въ-третьихъ*, опредѣлять точнымъ образомъ число частей, входящихъ въ составъ цѣлаго; *въ-четвертыхъ*, понимать относительное достоинство каждой изъ частей къ своему цѣлому; *въ-*

*) Таблицы Песталоцци, о которыхъ подробно сказано было выше.

пятыхъ, собирать однородныя мелкія части въ болѣе крупныя (сложеніе однородныхъ дробей), разлагать сложныя части на простыя, и проч. и проч.

Само собою разумѣется, что переходъ отъ квадратовъ и другихъ видимыхъ предметовъ къ отвлеченнымъ числамъ долженъ быть постепененъ, и чѣмъ преподаватель постарается поболѣе придать разнообразія своимъ упражненіямъ, тѣмъ прочнѣе утвердить въ дѣтяхъ начальныя понятія о дробныхъ числахъ.

Когда дѣло будетъ ведено основательно, тогда ученики безъ затрудненія отвѣтятъ на слѣдующіе общіе вопросы:

а) Какъ называется часть единицы, раздѣленная на 7, 9, 13, 20 и проч. равныхъ частей?

б) Что получится, если единицу раздѣлить на 5, 8, 11 и проч. равныхъ частей?

в) Какъ получить $^1/_3$, $^1/_7$, $^1/_{15}$, $^1/_{23}$ и проч.?

г) Что такое *пятая*, *осьмая*, *одиннадцатая* и проч. доли?

д) Что такое $^5/_7$, $^3/_5$, $^8/_9$ и проч.?

е) Сколько не достаетъ въ $^5/_6$, $^7/_9$, $^{13}/_{17}$ и проч. для составленія цѣлаго?

ж) Назовите нѣсколько дробей, и покажите какъ онѣ составились.

2) *Разсматриваніе цѣлыхъ чиселъ меньшаго наименованія, какъ дробныя числа большаго, того же рода.*

Цѣлыя величины въ отношеніи другихъ, съ ними однородныхъ величинъ, могутъ быть дробными числами; такъ *четверикъ* самъ по себѣ есть цѣлое, а въ отношеніи четверти (или куля) есть $1^1/_8$ ея; *пятакъ* самъ по себѣ есть цѣлое, а въ разсужденіи рубля составляетъ $^1/_{20}$.

1 коп. = $^1/_{100}$ рубля.
2 » = $^2/_{100}$ »
3 » = $^3/_{100}$ »
и проч.
27 » = $^{27}/_{100}$ »
23 » = $^{23}/_{100}$ »
и т. д.

1 день есть $^1/_{30}$ мѣсяца.
2 » = $^2/_{30}$ »
3 » = $^3/_{30}$ » и т. д.

Вообще здѣсь представляется возможность занимать учениковъ цѣлыми рядами дробныхъ чиселъ.

3. *Двоякое происхожденіе дробей и изображеніе ихъ цифрами; опредѣленіе частей дроби: числителя и знаменателя.*

Дробь произойдетъ, если отъ какого-либо цѣлаго, или единицы, будетъ взяты одна или нѣсколько равныхъ частей, а также, если меньшее число раздѣлится на большее. На таблицѣ первой будетъ видно, напримѣръ, что *три четверти* квадрата можно получить, когда цѣлый квадратъ раздѣлится на *четыре* равныя части и возьмется такихъ частей *три*; равнымъ образомъ, когда отъ каждаго изъ *трехъ* квадратовъ (того же ряда) взять по *одной* четверти, т. е., когда отъ трехъ равныхъ цѣлыхъ возьмется вдругъ *четвертая* часть, или *три* раздѣлится на *четыре*. Отсюда видно, что подъ именемъ дроби можно понимать и частное, происходящее отъ раздѣленія меньшаго числа на большее.

Тутъ, какъ и вездѣ, должно пользоваться всякимъ случаемъ, чтобы посредствомъ примѣненій привести истину въ большую ясность. Ученикъ знаетъ, напримѣръ, что 1 р. содержитъ въ себѣ 20 пятаковъ, $^1/_5$ р. $=$ 4 пятакамъ, $^1/_5$ *трехъ* рублей $= 3 \times 4 = 12$ пятакамъ; слѣдовательно, три раза пятая часть рубля все тоже, что пятая часть трехъ рублей.

Теперь надобно ознакомить дѣтей съ изображеніемъ дробей цифрами и съ понятіями о *числитель* и *знаменатель*. Они должны здѣсь хорошо разумѣть, что знаменатель соотвѣтствуетъ всегда вопросу: *какія части?* (пятыя, седьмыя, двѣнадцатыя и проч.), а числитель: *сколько такихъ частей взято?* (двѣ, три и проч.); равнымъ образомъ, если дробь есть выраженіе частнаго, то числитель соотвѣтствуетъ дѣлимому, а знаменатель дѣлителю; поэтому всякой разъ произойдетъ дробь, когда дѣлитель будетъ болѣе дѣлимаго.

4. *Взаимное сравненіе дробей; различные роды дробей; обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дробныя и обратно.*

Продолжая упражненія сперва по таблицѣ, а потомъ по другимъ видимымъ предметамъ, наводятъ учениковъ на взаимное сравненіе дробей, такъ что они, наконецъ, прійдутъ къ слѣдующимъ общимъ выводамъ:

а. Чѣмъ на большее число частей дѣлится цѣлое, или какое-либо число, тѣмъ части становятся менѣе. Обратно: чѣмъ меньше части, на которыя раздѣлено цѣлое, тѣмъ болѣе входитъ ихъ въ составъ его.

б) Изъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та менѣе, которой знаменатель болѣе прочихъ знаменателей.

в) Изъ всѣхъ дробей съ одинакими знаменателями большая есть та, у которой числитель болѣе прочихъ числителей.

Отсюда прямой переходъ къ разсмотрѣнію различныхъ родовъ дробей. Дроби, во-первыхъ, раздѣляются на *основныя* (простыя) и *сложныя*. Первыя суть тѣ, которыя имѣютъ числителемъ единицу (напр. $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_4$ и проч.), а вторыя, у которыхъ числители суть числа 2, 3, 4, 5 и проч., потому что онѣ составлены изъ повторенія или сложенія основныхъ дробей. Во-вторыхъ, на *правильныя*, или собственно дробныя числа, и *неправильныя*, т. е. выраженія, имѣющія видъ дроби, которыя заключаютъ въ себѣ одно или болѣе цѣлыхъ, кромѣ ихъ частей, а иногда только цѣлыхъ. Въ-третьихъ, *однородныя*, имѣющія одинакихъ знаменателей ($^5/_{14}$, $^9/_{14}$, $^{13}/_{14}$ и проч.), и *разнородныя*, у которыхъ знаменатели неодинакіе.

Такъ какъ неправильная дробь больше цѣлаго, то рождаются вопросы: какимъ образомъ отдѣлять отъ нея цѣлое число и, обратно, какъ всякое цѣлое число представлять въ видѣ неправильной дроби?

Предварительныя изустныя упражненія по таблицѣ приводятъ къ слѣдующимъ рядамъ, производимымъ изустно и письменно, которые понятны безъ дальнѣйшаго объясненія:

аа. 2 цѣл. $= {}^4/_2 = {}^6/_3 = {}^8/_4 = {}^{10}/_5 = {}^{12}/_6$ и проч.
3 » $= {}^6/_2 = {}^9/_3 = {}^{12}/_4 = {}^{15}/_5 = {}^{18}/_6$ »
4 » $= {}^8/_2 = {}^{12}/_3 = {}^{16}/_4 = {}^{20}/_5 = {}^{24}/_6$ »

и т. д.

бб. $1^1/_2$ ц. $= {}^3/_2$; $2^1/_2 = {}^5/_2$; $3^1/_2 = {}^7/_2$ и проч.
$1^1/_3$ ц. $= {}^4/_3$; $1^2/_3 = {}^5/_3$; $2^1/_3 = {}^7/_3$ »
$1^1/_4$ ц. $= {}^5/_4$; $1^2/_4 = {}^6/_4$; $1^3/_4 = {}^7/_4$ »

и т. д.

вв. 1) ${}^2/_2 = 1$;
${}^3/_2 = 1^1/_2$;
${}^4/_2 = 2$;
${}^5/_2 = 2^1/_2$;
и т. д.

2) ${}^3/_3 = 1$;
${}^4/_3 = 1^1/_3$;
${}^5/_3 = 1^2/_3$;
${}^6/_3 = 2$;
и т. д.

3) ${}^4/_4 = 1$;
${}^5/_4 = 1^1/_4$;
${}^6/_4 = 1^2/_4$;
${}^7/_4 = 1^3/_4$;
${}^8/_4 = 2$;
и т. д.

4) ${}^5/_5 = 1$;
${}^6/_5 = 1^1/_5$;
${}^7/_5 = 1^2/_5$;
${}^8/_5 = 1^3/_5$;
${}^9/_5 = 1^4/_5$;
${}^{10}/_5 = 2$;

и проч. и проч.

гг. $^{100}/_{2} = 50$;	$^{100}/_{3} = 33^{1}/_{3}$
$^{99}/_{2} = 49^{1}/_{2}$;	$^{99}/_{3} = 33$;
$^{98}/_{2} = 49$;	$^{98}/_{3} = 32^{2}/_{3}$;
$^{97}/_{2} = 48^{1}/_{2}$;	$^{97}/_{3} = 32^{1}/_{3}$;
и т. д.	$^{96}/_{3} = 32$;
	и т. д.

Отсюда, чрезъ переходъ отъ рядовъ къ частнымъ примѣрамъ и задачамъ, легко утвердить въ ученикахъ правила для извлеченія цѣлыхъ чиселъ изъ неправильныхъ дробей и, обратно, для обращенія смѣшанныхъ чиселъ въ неправильныя дроби.

5. *Разложеніе, сложеніе и вычитаніе однородныхъ дробей.*

Упражненія въ разложеніи, сложеніи и вычитаніи дробей, по той же таблицѣ, не представятъ никакой трудности.

Сюда относятся такого рода задачи:

а) Разложите $^{8}/_{11}$ на двѣ дроби, изъ которыхъ одна была бы болѣе другой двумя *одиннадцатыми.*

б) Сложите $^{7}/_{12}$ съ $^{3}/_{12}$ и $^{5}/_{12}$

в) Чѣмъ $^{8}/_{9}$ болѣе $^{4}/_{9}$?

г) Что получится, если отъ 1 отнять $^{3}/_{4}$?

д) Что останется, если изъ $2^{1}/_{5}$ вычесть $^{4}/_{5}$?

е) Разложите $^{6}/_{7}$ на двѣ неравныя части такъ, чтобъ одна изъ нихъ была болѣе другой только *одною седьмою.* (Задача невозможная).

ж) Разложите $^{9}/_{8}$ на такія двѣ неравныя части, что если отъ большей изъ нихъ отнять меньшую, то въ остаткѣ выйдетъ $^{1}/_{8}$.

з) Павелъ и Иванъ имѣютъ вмѣстѣ $^{11}/_{15}$ р.; первый имѣетъ болѣе втораго тремя пятнадцатыми рубля. Сколько денегъ у каждаго?

і) А и Б. имѣютъ вмѣстѣ $^{18}/_{19}$ фунта шелку; если А отдастъ двѣ части своего шелку Б, то оба будутъ имѣть поровно. Сколько каждый имѣетъ?

6. Измѣненіе достоинства и вида дроби чрезъ умноженіе или дѣленіе ея числителя; умноженіе дроби на дробь. Измѣненіе достоинства и вида дроби чрезъ умноженіе или дѣленіе ея знаменателя; дѣленіе дроби на цѣлое число; дѣленіе дроби на дробь. Нахожденіе какой-либо опредѣленной части отъ всякаго даннаго числа. Опредѣленіе искомаго цѣлаго числа по какимъ-либо даннымъ его частямъ.

Таже таблица послужитъ прекраснымъ нагляднымъ средствомъ для упражненій въ умноженіи и дѣленіи дробей.

Представимъ примѣры въ діалогической формѣ.

У. Покажите на таблицѣ $^2/_6$.

Д. Вотъ $^2/_6$.

У. Укажите дробь *вдвое* болѣе $^2/_6$.

Д. $^4/_6$.

У. Измѣнилась ли здѣсь величина частей?

Д. Нѣтъ, части остались тѣже, *шестыя.*

У. Что же измѣнилось?

Д. Число частей.

У. Во сколько разъ оно увеличилось?

Д. Вдвое.

У. Покажите на таблицѣ $^3/_{10}$, и потомъ означьте на той же таблицѣ дробь, которая *вчетверо больше* $^3/_{10}$.

Д. Дробь, которая *вчетверо* болѣе $^3/_{10}$ есть $^{12}/_{10}$ (указывая на таблицѣ) или 1 цѣлое и $^2/_{10}$.

У. Поэтому, при увеличеніи дроби въ нѣсколько кратъ, который изъ членовъ ея увеличивается: числитель или знаменатель?

Д. Числитель.

У. Во сколько разъ?

Д. Во столько разъ, во сколько увеличивается дробь.

У. Слѣдовательно, что произойдетъ съ дробью, если ея числитель увеличится въ нѣсколько разъ?

Д. Она также во столько же разъ увеличится.

Д. Увеличить дробь въ нѣсколько разъ тоже значитъ, что умножить ея числителя на тоже число разъ.

Примѣръ: $5 \times {}^2/_3 = \frac{5 \times 2}{3} = {}^5/_3\ 2$

Это выраженіе также показываетъ, что отъ *пяти цѣлыхъ* берется *два* раза *третья* часть.

Поэтому, *умножить цѣлое число на дробь тоже значитъ, что взять отъ цѣлаго числа столько частей, сколько содержится въ дроби.* Отсюда наконецъ видно, что для умноженія дроби на цѣлое число надобно произвести тоже дѣйствіе, что и для умноженія цѣлаго числа на дробь, т. е. *умножить цѣлое число на числителя и подъ произведеніемъ подписать знаменателя.*

Примѣненія:

а) Нѣкто имѣлъ 14 рублей; онъ издержалъ $^2/_3$ этой суммы. Сколько у него осталось рублей?

Рѣш. $^1/_3$ отъ $14 = ^{14}/_3$; $^2/_3$ отъ $14 = \frac{2 \times 14}{3} = ^{28}/_3 = 9^1/_3$; $14 - 9^1/_3 = 4^2/_3$ руб.

б) Одинъ мастеръ съ своимъ подмастерьемъ условились между собою такъ, что всякой разъ, изъ вырученной обоими суммы денегъ, первый будетъ брать на свою долю $^2/_3$ ея. Они заработали въ первый день 10 р., во второй день 11 р., въ третій день 13 р. Спрашивается: сколько придется получить мастеру рублей изъ всей заработанной суммы?

Съ тою же постепенностію ученики приводятся къ убѣжденію, что *дробь уменьшится въ два или нѣсколько разъ, когда при томъ же знаменованіи частей, число этихъ частей уменьшится въ два или нѣсколько разъ. Другими словами: дробь уменьшится въ 2, 3, 4 и болѣе разъ, когда числитель ея раздѣлится на 2, 3, 4 и болѣе единицъ.*

Но числителя дроби нельзя всегда раздѣлить безъ остатка; въ такомъ случаѣ уменьшеніе дроби въ нѣсколько разъ производится чрезъ увеличеніе ея знаменателя въ тоже число разъ.

Сравнивая по таблицѣ дроби: $^1/_2$ и $^1/_4$, $^1/_4$ и $^1/_8$, $^1/_5$ и $^1/_{10}$, $^1/_5$ и $^1/_9$, $^1/_2$ и $^1/_8$, $^1/_2$ и $^1/_{20}$ и т. д., преподаватель легко доведетъ учениковъ до сознанія, что чрезъ увеличеніе знаменателя въ нѣсколько кратъ достоинство самой дроби во столько же кратъ уменьшится.

Сюда относятся ряды:

aa. $^1/_2$ вдвое $> ^1/_4$;
$^1/_3$ » $> ^1/_6$;
$^1/_4$ » $> ^1/_8$;
и т. д.

bb. $^1/_2$ втрое $> ^1/_6$;
$^1/_3$ » $> ^1/_9$;
$^1/_4$ » $> ^1/_{12}$;
и т. д.

cc. $^1/_2$ вчетверо $> ^1/_8$;
$^1/_3$ » $> ^1/_{12}$;
и проч. и проч.

При этомъ должно обращать вниманіе на то, чтобъ ученики усвоили себѣ тождественность слѣдующихъ выраженій:

1) уменьшить дробь въ два или нѣсколько разъ; 2) увеличить ея знаменателя въ два или нѣсколько разъ; 3) раздѣлить ея числителя на 2, 3, 4 и проч.

Но нельзя довольствоваться здѣсь двумя, тремя примѣрами, если желаютъ, чтобъ ученики сами находили правила на всякій отдѣльный пріемъ исчисленія и всегда дѣйствовали сознательно.

Раздѣлить дробь на какое-либо число значитъ тоже, что взять отъ нея какую-либо опредѣленную часть.

Такъ, раздѣлить $^1/_2$ на 2 все тоже, что отъ $^1/_2$ взять *половину*, т. е. получить $^1/_4$. Поэтому, $^1/_2 : 2 = {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$.

При помощи второй таблицы ученики легко поймутъ слѣдующіе ряды:

$^1/_2$ отъ $^1/_2 = {}^1/_4$;	$^1/_3$ отъ $^1/_2 = {}^1/_6$;
$^1/_2$ » $^1/_3 = {}^1/_6$;	$^1/_3$ » $^1/_3 = {}^1/_9$;
$^1/_2$ » $^1/_4 = {}^1/_8$;	$^1/_3$ » $^1/_4 = {}^1/_{12}$;
и т. д.	и т. д.

Если $^1/_2$ отъ $^1/_2$ составляетъ $^1/_4$, то $^1/_2$ отъ $^3/_2$ есть $^3/_4$; $^1/_2$ отъ $^3/_5$ составляетъ $^3/_{10}$ и т. д.

Послѣ этого не трудно будетъ опредѣлить $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и проч., $^2/_3$, $^3/_4$, $^2/_5$, $^3/_5$ и проч. не только отъ всякой дроби, но и отъ смѣшаннаго числа.

Примѣръ. Опредѣлить $^1/_3$ отъ $2^1/_2$. Отв. $^1/_3$ отъ $^1/_2 = {}^1/_6$; $2^1/_2 = {}^5/_2$; $^1/_3$ отъ $^5/_2 = {}^5/_6$.

Такимъ образомъ постепенно доходятъ до правила: *чтобы взять $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и проч. отъ какой-либо дроби, надобно знаменателя этой дроби умножить на 2, 3, 4 и проч.*

Отсюда слѣдуетъ перейти къ дѣленію дроби на дробь (къ содержимости дробныхъ чиселъ). И здѣсь, для предварительныхъ упражненій, съ большою пользою можетъ быть употреблена вторая таблица.

Ученики, упражняясь по этой таблицѣ, легко поймутъ, что напримѣръ, *половина* отъ $^2/_3$ составляетъ $^1/_3$; $^1/_3$ отъ $^3/_4 = {}^1/_4$; $^3/_2$ отъ $^9/_2 = {}^1/_3$ и проч.; равнымъ образомъ $^3/_2$ отъ $4^1/_2$ тоже $^1/_3$, ибо $4^1/_2 = {}^9/_2$, а $^3/_2$ въ $^9/_2$ содержится ровно 3 раза, и т. д.

Помощію этихъ наглядныхъ упражненій, ученики легко и скоро привыкнутъ рѣшать задачи, подобныя слѣдующимъ:

а. Сколько разъ $^7/_3$ содержится въ $9^2/_3$?

Отв. $4^1/_7$ раза; потому что $9^2/_3 = {}^{29}/_3$; $^7/_3$ въ $^{29}/_3 = {}^{29}/_7 = 4^1/_7$.

б. Отъ какого числа $5^2/_5$ составляютъ *третью* часть?

Отв. Отъ $16^1/_5$; ибо искомое число должно быть въ три раза более $5^2/_5$;

$$3 \times 5 = 15;\ 3 \times {}^2/_5 = {}^6/_5 = 1^1/_5;\ 15 + 1^1/_5 = 16^1/_5.$$

в. Отъ какого числа 5 цѣлыхъ составляютъ $^4/_9$?

Отв. Отъ $11^1/_4$; ибо $5 = ^{20}/_4$, $20 = 4 \times ^5/_4$; если $4 \times ^5/_4$ составляютъ $^4/_9$ искомаго числа, то одна часть его будетъ $= ^5/_4$; слѣдовательно, все число или *девять девятыхъ* $= 9 \times ^5/_4 = ^{45}/_4 = 11^1/_4$.

г. Отъ какого числа 7 цѣлыхъ составляютъ $^5/_8$?

Отв. Отъ $11^1/_5$; ибо 7 цѣлыхъ $= ^5/_8$ искомаго числа; поэтому $^1/_8$ этого числа $= ^7/_5$, а *восемь осьмыхъ* $= \frac{8 \times 7}{5} = \frac{56}{5} = 11^1/_5$ и т. д.

Къ задачамъ о дробяхъ, выраженныхъ въ малыхъ числахъ, должно примѣнять различныя мѣры вѣса, времени, длины и проч., что еще болѣе придастъ разнообразія этому роду упражненій.

Примѣры.

а. Сколько фунтовъ въ $^3/_8$ пуда?

Отв. 15 фунт.; потому что $^1/_8$ п.$=5$ ф.; $3 \times ^1/_8$ п.$=3 \times 5=15$ ф.

б. Сколько въ $5^3/_4$ часа содержится минутъ?

Отв. 345; ибо 5 ч. $= 5 \times 60$ м. $= 300$ м.; $^1/_4$ ч. $= 15$ м.; $^3/_4$ ч. $= 45$ м.; 300 м. $+$ 45 м. $= 345$ м.

в. Какую часть $^3/_4$ фунта составляютъ отъ 1 пуда?

Отв. $^3/_{160}$; потому что 1 ф. $= ^1/_{40}$ пуда; $^1/_4$ ф. $= ^1/_{160}$ п.; $^3/_4$ ф. $= ^3/_{160}$ пуда.

г. Во сколько дней издержится пудъ, если ежедневно тратить по $^5/_8$ фунта?

Отв. Въ 64 дня; потому что 1 пудъ $= 40$ ф.; 1 пудъ $= \frac{320}{8}$ ф.; но $^5/_8$ въ $\frac{320}{8}$ содержится столько же разъ, сколько 5 въ 320, т. е. 64 раза.

7. *Измѣненіе вида дроби, но не величины ея.*

Чрезъ увеличеніе или уменьшеніе въ одинаковое число разъ, какъ числителя такъ и знаменателя дроби, измѣняется только видъ ея, но не величина. Увеличивъ, напримѣръ, числителя и знаменателя дроби $^3/_4$ въ 5 разъ, получимъ дробь $\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = ^{15}/_{20}$, которая есть только видоизмѣненіе дроби $^3/_4$. Равнымъ образомъ и обратно, дробь $^8/_{16}$, чрезъ дѣленіе ея числителя и знаменателя на 8, обратится въ $^1/_2$. Очевидно, что здѣсь два случая имѣютъ мѣсто: а, *дробь выраженную въ малыхъ числахъ, всегда можно представить въ большихъ*, и б, *вмѣсто дроби, изображенной въ большихъ числахъ, можно иногда получить ей равнозначащую, представленную въ малыхъ числахъ.* При

исчисленіи дробными числами, и въ томъ и въ другомъ мы часто нуждаемся. Напримѣръ, чтобы сложить вмѣстѣ $^1/_3$ и $^1/_{24}$, мы не можемъ иначе поступить, какъ $^1/_3$ привести въ *двадцать-четвертыя* части; если же числителя и знаменателя дроби $^1/_3$ умножимъ на 8, то получимъ $^8/_{24}$, которыя, будучи сложены съ $^1/_{24}$, дадутъ въ суммѣ $^9/_{24}$. Но эта послѣдняя дробь есть только *видоизмѣненіе* дроби $^3/_8$. Дѣйствительно, стоитъ только числителя и знаменателя дроби $^9/_{24}$ раздѣлить на 3, чтобы получить $^3/_8$.

Такимъ образомъ, безъ умѣнья *видоизмѣнять* дроби мы не могли бы ни складывать ихъ между собою, ни вычитать одну изъ другой; потому что эти дѣйствія мы можемъ производить только надъ однородными дробями. Отсюда во всѣхъ ариѳметическихъ книгахъ имѣютъ мѣсто двѣ слѣдующія отдѣльныя статьи: 1, *приведеніе дробей къ одинакому знаменателю;* 2, *сокращеніе дробей.*

Въ первоначальныхъ исчисленіяхъ надъ дробными числами, эта раздѣльность неумѣстна; она только сбиваетъ учениковъ. Благоразумнѣе поступитъ преподаватель, если видоизмѣненіе дробей соединитъ вмѣстѣ съ самыми исчисленіями надъ ними, при помощи второй таблицы.

Укажемъ для этого примѣры въ діалогической формѣ.

У. Что составляетъ *половина* и *четверть?*

Д. Три четверти.

У. Почему?

Д. Въ половинѣ (указывая на второй рядъ таблицы) содержится *двѣ четверти;* двѣ четверти и одна четверть составляютъ *три четверти.*

У. Сколько получится, если отъ $^7/_9$ вычесть $^1/_3$?

Д. $^4/_9$; потому что $^1/_3$ все равно, что $^3/_9$; $^7/_9$ безъ $^3/_9 = {}^4/_9$.

У. (Указывая на одинъ квадратъ седьмаго ряда таблицы), на сколько частей раздѣленъ этотъ квадратъ продольными чертами?

Д. На семь частей.

У. А поперечными?

Д. Тоже на семь.

У. Сколько же въ немъ всего разныхъ частей?

Д. Сорокъ девять.

У. А сколько приходится ихъ на $^1/_7$ всего квадрата?

Д. $^7/_{49}$.

У. А въ $^5/_7$ квадрата?

Д. $^{35}/_{49}$.

У. Что же надобно сдѣлать съ числителемъ и знаменателемъ дроби $^5/_7$, чтобы вмѣсто этихъ частей получить *сорокъ-девятыя* части?

Д. Числителя и знаменателя дроби $^5/_7$ помножить на 7.

У. Но вѣдь тогда число частей сдѣлается болѣе?

Д. За то части сами по себѣ сдѣлаются мельче.

У. Во сколько разъ?

Д. Во столько же разъ, во сколько взято число ихъ; потому что *сорокъ-девятыя* части въ *семь* разъ мельче *седьмыхъ* частей.

У. Итакъ, умножить числителя и знаменателя дроби на одно и тоже число значитъ только *измѣнить видъ*, но не величину ея.

и т. д.

Заключеніе. Во всѣхъ упражненіяхъ мы не предлагали отдѣльныхъ правилъ для исчисленій дробными числами, довольствуясь прямымъ рѣшеніемъ примѣровъ; это потому, что мы желаемъ, чтобъ ученики сами мало по малу усвоивали себѣ правила, а не заучивали ихъ просто наизусть. Конечно дѣло преподавателя и здѣсь руководствовать учениковъ, чтобъ они кратчайшимъ путемъ достигали цѣли; однакожь, все пособіе съ его стороны должно состоять въ однихъ вопросахъ, а никакъ не въ толкованіяхъ, которыя только ослабляютъ дѣятельность учащихся.

Приложеніе 3.

Различныя дѣйствія надъ дробными числами вообще.

Хотя, въ сущности, правила и здѣсь не измѣняются противъ изложенныхъ въ предыдущихъ упражненіяхъ, однакожь при большихъ числахъ, входящихъ нерѣдко въ исчисленіе, необходимо бываетъ прибѣгать еще къ частнымъ правиламъ и облегчительнымъ пріемамъ, которыя всѣ, болѣе или менѣе, имѣютъ цѣлію *доставлять результаты сколь-возможно въ простѣйшемъ видѣ.* Этихъ частныхъ правилъ и пріемовъ столько, что они съ избыткомъ наполняютъ довольно скудный скелетъ ариѳметическій и требуютъ для усвоенія ихъ учениками строгаго порядка и связи въ изложеніи. Мы не намѣрены здѣсь послѣдовательно говорить обо всемъ, что составляетъ въ совокупности теорію дробей, такъ какъ это предметъ извѣстный всякому преподавателю; но мы будемъ останавливаться на тѣхъ мѣстахъ, которыя, по нашему мнѣнію, заслуживаютъ особаго вниманія въ педагогическомъ отношеніи.

Вотъ перечень сюда относящихся упражненій:

a) *Опредѣленіе дроби.*

b) *Двоякое происхожденіе дробей.*

c) *Изображеніе дробей цифрами.*

d) *Взаимное сравненіе дробей.*

1) *Изъ двухъ или нѣсколькихъ дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, та болѣе, у которой числитель болѣе прочихъ.*

Напр. $^5/_8 > {^3/_8}$.

2) *Изъ двухъ или нѣсколькихъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та болѣе, у которой знаменатель менѣе прочихъ*

Напр. $^4/_7 > {^4/_{13}}$.

e) *Различные роды дробей.*

f) *Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дроби, и обратно.*

g) *Различныя измѣненія дробей.*

1. *Если къ числителю дроби прибавимъ какое-либо число, а знаменатель оставимъ тотъ же, то дробь увеличится, и увеличится на столько частей, однородныхъ съ тѣми, которыя выражаются самою дробью, сколько единицъ въ прибавляемомъ цѣломъ числѣ.*

Напр. $^2/_7 < \frac{2 + 3}{7}$, или $^5/_7$, тремя седьмыми.

2. *Если къ обоимъ членамъ дроби прибавимъ какое-либо число, то получаемая отъ этого дробь будетъ болѣе данной, и чѣмъ прилагаемое число будетъ болѣе, тѣмъ и дробь болѣе.*

Доказательство. Пусть, напримѣръ, къ обоимъ членамъ дроби $^7/_{15}$ прибавится число 4; тогда вмѣсто $^7/_{15}$ получимъ $^{11}/_{19}$. Говорю, что $^{11}/_{19}$ болѣе $^7/_{15}$. Разность между 1 и $^{11}/_{19}$ есть $^8/_{19}$, а между 1 и $^7/_{15}$ есть $^8/_{15}$; числители обѣихъ разностей ($^8/_{19}$, $^8/_{15}$) одни и тѣже, что и должно быть, потому что числа 11 и 19 составились чрезъ прибавленіе къ числамъ 7 и 15 одного и того же числа 4; значитъ, что между 19 и 11 находится такая же разность, какъ и между 7 и 15; но разность $^8/_{19}$ менѣе разности $^8/_{15}$, поэтому дробь $^{11}/_{19}$ ближе подходитъ къ единицѣ, нежели $^7/_{15}$; слѣдовательно, первая болѣе второй. Очевидно также, что чѣмъ бо́льшее число станемъ прибавлять къ обоимъ членамъ дроби $^7/_{15}$, тѣмъ разность между единицею и новою дробью будетъ дѣлаться менѣе; ибо числитель разности остается непремѣнный, именно 8, а знаменатель ея будетъ все возрастать; слѣдовательно, самая дробь будетъ увеличиваться. Приведенное нами разсужденіе можно приложить ко всякой дроби.

4. *Обратно, дробь уменьшится, если изъ обоихъ ея членовъ вычтется какое-либо цѣлое число, и она будетъ безпрестанно уменьшаться, по мѣрѣ увеличенія вычитаемаго числа.*

Доказательство. Пусть изъ обоихъ членовъ дроби $^{13}/_{19}$ вычтется число 5; получимъ тогда $\frac{13-5}{19-5}$ или $^{8}/_{14}$. Дробь эта $>$ $^{13}/_{19}$ потому, что въ $^{8}/_{14}$ до цѣлаго недостаетъ $^{6}/_{14}$, а въ дроби $^{13}/_{19}$ только $^{6}/_{19}$; но чѣмъ большая разность между *единицею* и *дробью*, тѣмъ самая дробь менѣе. Тоже разсужденіе можно приложить и ко всякой другой дроби.

5. *Если, оставляя неизмѣняемымъ знаменателя дроби, умножимъ или раздѣлимъ ея числителя на какое-либо число, то полученная новая дробь будетъ во столько же разъ болѣе или менѣе первой, сколько во множителѣ или дѣлителѣ находится единицъ.*

Доказательство. Дѣйствительно, чрезъ умноженіе числителя дроби на 2, 3, 4, 5 . . . . показываемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5 . . . разъ болѣе частей, нежели сколько было прежде взято; но какъ самыя части остаются тѣже самыя, то и выходитъ, что новая дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ болѣе прежней. Обратно: раздѣляя числителя на 2, 3, 4, 5 . . . . . . тѣмъ означаемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ менѣе частей, нежели сколько сначала было въ дроби; поэтому и сама дробь уменьшится въ 2, 3, 4, 5 . . . . разъ.

6. *Если, не перемѣняя числителя, умножимъ или раздѣлимъ знаменателя дроби на какое-либо число, то дробь уменьшится или увеличится во столько разъ, сколько во множителѣ или дѣлителѣ находится единицъ.*

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, умножая знаменателя на 2, 3, 4, 5 . . . ., мы уменьшаемъ части цѣлаго тоже въ 2, 3, 4, 5 . . . . разъ, между тѣмъ какъ число ихъ остается прежнее; значитъ, что полученная отсюда дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ менѣе прежней. Раздѣляя же знаменателя на 2, 3, 4, 5 . . . . . получаемъ на-оборотъ дробь болѣе данной въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ; ибо, при томъ же числѣ, части сами по себѣ становятся крупнѣе или болѣе прежнихъ въ 2, 3, 4, 5 . . . разъ.

7. *Дробь не перемѣняетъ своей величины, если оба ея члена умножатся или раздѣлятся на одно и тоже число.*

Доказательство. Чрезъ умноженіе числителя дроби на какое-либо число, она увеличится во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ; чрезъ умноженіе знаменателя на тоже самое число, она во столько же разъ уменьшится; поэтому, чрезъ умноженіе обоихъ чле-

новъ дроби на одно и тоже число, во сколько разъ числитель ея увеличится, во столько разъ знаменатель уменьшится, значитъ самая дробь не измѣнитъ своей величины. Подобное же расужденіе убѣждаетъ насъ и въ томъ, что дробь также не перемѣнитъ своей величины, если оба ея члена раздѣлятся на одно и тоже число.

На послѣднемъ правилѣ основываются два *преобразованія* дробей (видоизмѣненія). которыя играютъ важную роль во всѣхъ исчисленіяхъ надъ дробными числами, а именно: 1) *сокращеніе дробей* и 2) *приведеніе дробей къ одинакому знаменателю.*

h. Цѣль сокращенія дробей состоитъ въ приведеніи ихъ къ простѣйшему виду, не перемѣняя впрочемъ ихъ значенія. Такъ, напримѣръ, чтобы сократить дробь $^{12}/_{30}$, замѣчаемъ, что общій дѣлитель обоихъ ея членовъ есть 2; раздѣливъ числителя и знаменателя дроби $^{12}/_{30}$ на 2. получаемъ вмѣсто ея равноозначащую ей дробь $^{6}/_{15}$. Послѣдняя дробь еще можетъ быть сокращена на 3, ибо видно, что оба ея члена дѣлятся безъ остатка на 3, — что и приводитъ насъ окончательно къ дроби $^{2}/_{5}$. Итакъ, простѣйшій видъ дроби $^{12}/_{30}$ есть $^{2}/_{5}$.

Но здѣсь нельзя далѣе продолжать сокращенія, потому что члены послѣдней дроби ($^{2}/_{5}$) суть числа *первыя между собою*, которыя никакого общаго дѣлителя, кромѣ единицы, не имѣютъ. Изъ этого слѣдуетъ, что дробь тогда только вполнѣ сокращена, когда оба ея члена сдѣлались *первыми между собою* числами.

Примѣч. Не мѣшаетъ сообщить здѣсь дѣтямъ таблицу первыхъ чиселъ, доведенную хоть до 1000.

Такъ какъ на практикѣ чаще всего случается сокращать дроби на первыя десять чиселъ, то и слѣдуетъ сообщить ученикамъ о признакахъ дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Но въ элементарномъ преподаваніи должно остановиться на этихъ числахъ. чтобъ не перейдти за предѣлы дѣтскихъ понятій. Признаковъ дѣлимости чиселъ много, но они съ большею отчетливостію выводятся только изъ общихъ свойствъ чиселъ, доказываемыхъ посредствомъ Алгебры. См. сочиненія: Théorie des nombres Лежандра и Desquisitiones Arithmeticae Гаусса.

Послѣ этого слѣдуетъ изложить способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или болѣе чиселъ; потому что предыдущихъ правилъ о дѣлимости чиселъ на первыя десять чиселъ недостаточно для всѣхъ случаевъ сокращенія дробей. Впрочемъ и то надобно замѣтить, что если ученики будутъ пріучены къ тому, чтобы при каж-

домъ пріемѣ исчисленія тотчасъ сокращать дроби, а не дожидаться окончательнаго вывода, то имъ рѣдко встрѣтится на практикѣ случай прибѣгать къ теоріи нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя. Сложные выводы, затрудняющіе исчисленіе, особенно повѣрку его, происходятъ всего чаще оттого, что въ преподаваніи упираютъ много на общія правила и опускаютъ изъ вида частныя, которыя нерѣдко прямо ведутъ къ простѣйшему выводу, разумѣется, при извѣстныхъ условіяхъ задачи. Это замѣчаніе въ особенности относится къ отъисканію общаго знаменателя дробей, на что мы теперь и намѣрены обратить особенное вниманіе преподавателя.

1. Обыкновенно при сложеніи нѣсколькихъ дробей, для приведенія разнородныхъ частей въ однородныя, ставятъ во главѣ слѣдующее правило: «*для полученія общаго знаменателя надобно всѣхъ частныхъ знаменателей перемножить между собою*», и потомъ уже допускаютъ изъ этого общаго правила изъятія въ томъ случаѣ, когда частные знаменатели или содержатся одинъ въ другомъ, или не суть между собою первыя числа. Естественно, что ученики въ такомъ случаѣ прежде всего затвердятъ общее правило, и потомъ употребляютъ его при всѣхъ возможныхъ примѣненіяхъ. Вотъ отъ чего происходятъ въ ихъ исчисленіяхъ лишнія умноженія, а потому въ концѣ выкладокъ и слишкомъ сложные выводы. Послѣ этого начинается новый процессъ: какъ сократить эти выводы? Все это пугаетъ неопытнаго счетовода, уноситъ у него понапрасну много времени, а между тѣмъ и обезкураживаетъ его.

Всегда надобно помнить, что сила рѣшенія задачи заключается въ сокращеніи дѣйствія. Если ученику не опредѣлено пользоваться высшимъ образованіемъ, то изъ него, пріученнаго съ раннихъ лѣтъ къ самымъ сокращеннымъ выкладкамъ, образуется покрайней мѣрѣ хорошій практикъ; если же, напротивъ, онъ долженъ пройдти Алгебру, то этотъ зародышъ, который вы въ него вложите, принесетъ ему впослѣдствіи богатые плоды: онъ привыкнетъ издалека уже смотрѣть на Алгебру, какъ на символы краткости.

Приступая къ теоріи нахожденія общаго знаменателя, предварительно надобно преподать ученикамъ слѣдующую теорему изъ теоріи чиселъ.

1. *Если два данныя неравныя числа, не будучи первыми между собою, разлагаются на сомножителей, изъ которыхъ одинъ будетъ общимъ для обоихъ чиселъ, и если тотъ сомножитель меньшаго числа, который не есть общій для обоихъ чиселъ, помножится на*

большее число, то полученное такимъ образомъ произведеніе всегда дѣлитъ безъ остатка меньшее изъ данныхъ чиселъ.

Доказательство. Пусть даны два числа: 14 и 20. Обоихъ ихъ можно разложить на сомножителей, изъ которыхъ одинъ будетъ общимъ какъ для 14, такъ и для 20, а именно:

$$14 = 2 \times 7$$
$$20 = 2 \times 10$$

Если 20 помножить на 7, то произведеніе 20 × 7 или 140 должно раздѣлиться безъ остатка на число 14. Это очевидно, потому что въ такомъ случаѣ и полученное произведеніе и меньшее изъ данныхъ чиселъ будутъ включать въ себѣ одинакихъ множителей:

$$140 = 7 \times 2 \times 10$$
$$14 = 7 \times 2$$

Но 7 × 2 × 10 всегда дѣлится безъ остатка на 7 × 2, ибо здѣсь дѣлимое составлено изъ дѣлителя, повтореннаго точное число разъ.— Тоже разсужденіе легко приложить и ко всякимъ другимъ числамъ.

Примѣч. При разложеніи чиселъ на сомножителей, всегда надобно имѣть въ виду, чтобы общій множитель былъ сколько возможно большимъ числомъ, ибо въ такомъ случаѣ получаемое произведеніе будетъ выражать по возможности меньшее число. Напр., число 24 и 18 можно разложить такъ: 24 = 2 × 12, 18 = 2 × 9; но здѣсь произведеніе изъ 24 на 9, или 216, и подавно раздѣлитъ безъ остатка число 18; потому что оно есть кратное вразсужденіи 72; 216 = 72 × 3.

Что сказано о двухъ числахъ, тоже можно сказать о трехъ, четырехъ и т. д.

Теперь обратимся къ самому правилу приведенія дробей къ одинакому знаменателю.

Это преобразованіе имѣетъ цѣлью — привести двѣ или болѣе разнородныя дроби въ однородныя. Оно основывается на томъ свойствѣ, что дробь не измѣняетъ своего значенія, если оба ея члена умножатся на одно и тоже число. Но, приводя дроби къ одинакому знаменателю, важнѣе всего стараться о томъ, *чтобъ общій знаменатель былъ выраженъ сколько возможно малымъ числомъ*. Вслѣдствіе этого разсмотримъ здѣсь три случая: 1) когда знаменатели данныхъ дробей находятся въ такомъ между собою отношеніи, что большій изъ нихъ содержитъ въ себѣ всѣхъ прочихъ безъ остатка, 2) когда большій знаменатель не содержитъ въ себѣ безъ остатка всѣхъ прочихъ, однакожъ данные знаменатели не суть между собою первыя числа, и 3) когда они суть числа первыя между собою

1-й Случай. Если въ данныхъ дробяхъ большій знаменатель есть въ тоже время и кратное число вразсужденіи всѣхъ прочихъ, то онъ будетъ и общимъ.

Примѣръ. Требуется привести къ одинакому знаменателю слѣдующія дроби: $^5/_6$, $^3/_8$, $^2/_3$, $^{17}/_{24}$.

Здѣсь бóльшій знаменатель (24) есть *кратное число* вразсужденіи всѣхъ прочихъ (6, 8, 3). Раздѣляя послѣдовательно число 24 на 6, 8, 3, получимъ множителей: для первой дроби 4, для второй 3, а для третьей 8. Если помножимъ числителя и знаменателя первой дроби на 4, второй — на 3, а третьей — на 8, то опредѣлимъ дроби, выраженныя въ 24-хъ доляхъ.

Дѣйствіе располагается такъ:

$$^5/_6 = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = {}^{20}/_{24}$$
$$^3/_8 = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = {}^{9}/_{24}$$
$$^2/_3 = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = {}^{16}/_{24}$$
$$^{17}/_{24} \qquad = {}^{17}/_{24},$$

или проще, съ употребленіемъ méньшаго числа цифръ:

	24	
$^5/_6$	4	20
$^3/_8$	3	9
$^2/_3$	8	16
$^{17}/_{24}$	1	17

Послѣдній изъ рядовъ представляетъ числителей; общій же ихъ знаменатель поставленъ вверху.

2-й Случай. Если числители данныхъ дробей не суть частныя вразсужденіи одного изъ нихъ, но не суть и первыя числа между собою, то вмѣсто общаго знаменателя берутъ произведеніе, составленное изъ бóльшаго знаменателя и тѣхъ изъ сомножителей прочихъ знаменателей, которые въ этомъ большемъ не содержатся безъ остатка.

Пусть даны дроби: $^{17}/_{36}$, $^5/_8$, $^{11}/_4$, $^3/_{10}$.

Для первыхъ двухъ дробей общій наименьшій знаменатель будетъ 36×2 или 72, потому что $36 = 4 \times 9$, $8 = 4 \times 2$; для первыхъ трехъ дробей останется тотъ же общій знаменатель 72, потому что 24 содержится въ этомъ числѣ ровно 3 раза; наконецъ, для всѣхъ четырехъ дробей общій наименьшій знаменатель будетъ число 360;

ибо $72 = 2 \times 36$, а $10 = 2 \times 5$; поэтому, для полученія меньшаго общаго знаменателя надобно число 72 помножить на 5.

3-й Случай. Если знаменатели данныхъ дробей всѣ суть первыя между собою числа, тогда нѣтъ другаго средства опредѣлить общаго наименьшаго знаменателя, какъ только чрезъ умноженіе между собою всѣхъ данныхъ знаменателей.

Изъ предложеннаго теперь нами способа находить общаго знаменателя, преподаватель легко усмотритъ, что важнѣе всего обращать постоянное вниманіе учащихся на взаимныя отношенія знаменателей: тогда они безъ затрудненія станутъ отъискивать самаго мéньшаго общаго знаменателя.

Не должно отдѣльно отъ сложенія, вычитанія и дѣленія упражнять учениковъ въ приведеніи дробей къ одинакому знаменателю, чтобы не разрывать безъ нужды хода дѣйствія.

Мы не останавливаемся на объясненіи самыхъ дѣйствій надъ дробными числами, во-первыхъ, потому что высказали впереди уже все, что было нужно въ педагогическомъ отношеніи, во-вторыхъ, потому, что во всѣхъ курсахъ Ариѳметики можно найдти все остальное.

Въ заключеніе этой статьи, упомянемъ только о нѣкоторыхъ замѣчаніяхъ, относящихся къ умноженію и дѣленію дробей.

Умноженіе дробей допускаетъ многія сокращенія, которыхъ при самомъ дѣйствіи никогда не должно выпускать изъ вида.

Примѣръ.

Чему $= {}^5/_8 \times {}^3/_4 \times {}^7/_9 \times {}^4/_5$?

Рѣш. ${}^5/_8 \times {}^3/_4 \times {}^7/_9 \times {}^4/_5 = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5}$

Здѣсь замѣчаемъ, что въ произведеніе числителей и въ произведеніе знаменателей входятъ одинакія множители, а именно: 5, 3 4; ибо множитель 9, въ произведеніи знаменателей, можно замѣнить 3×3. Исключеніемъ общихъ множителей изъ обоихъ произведеній нисколько не измѣнится отношеніе между членами искомой дроби, потому что чрезъ это сокращеніе уменьшимъ ихъ въ одинакое число разъ, отъ чего, какъ извѣстно, дробь своего значенія не перемѣняетъ. Итакъ, вмѣсто выраженія $\frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5}$ можно взять выраженіе $\frac{7}{8 \times 3}$, которое равно ${}^7/_{24}$.

Еще примѣръ.

Что получится, если ${}^{24}/_{25}$ умножить на 15?

Рѣш. ${}^{24}/_{25} \times 15 = \frac{24 \times 15}{25} = \frac{24 \times 5 \times 3}{5 \times 5} = {}^{72}/_5 = 14{}^2/_5$.

Тоже должно наблюдать и при дѣленіи дробей, т. е. всѣ произведенія изображать только въ своихъ множителяхъ, а не опредѣлять ихъ дѣйствительно, на тотъ конецъ, чтобы при окончательномъ результатѣ тотчасъ можно было видѣть, на какія именно числа сокращается частное, и этимъ сокращеніемъ непремѣнно воспользоваться.

Примѣръ.

Раздѣлить $^{18}/_{25}$ на $^{14}/_{63}$.

Рѣш. $^{18}/_{25} : {}^{14}/_{63} = \frac{18 \cdot 63}{25 \cdot 63} : \frac{14 \cdot 25}{63 \cdot 25} = \frac{18 \cdot 63}{14 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 5} = {}^{81}/_{25} = 3^{6}/_{25}$.

Не менѣе важно обращать вниманіе учениковъ на различныя рѣшенія одной и той же задачи.

Пусть требуется 23 раздѣлить на $^{4}/_{5}$.

Эту задачу можно рѣшить слѣдующими способами:

a) $23 = {}^{115}/_{5}$; $^{4}/_{5}$ въ $^{115}/_{5}$ столько же разъ содержится, сколько 4 въ 115, т. е. $^{115}/_{4}$ или $28^{3}/_{4}$.

b) $23 : 1 = 23$; $23 : {}^{1}/_{5} = 23 \times 5$; $^{115}/_{4} = 28^{3}/_{5}$. Если 1 въ 23 содержится 23 раза, то $^{1}/_{5}$, будучи въ *пять* разъ менѣе 1, должна въ числѣ 23 содержаться въ *пять разъ болѣе* 23, или 115. Но какъ требуется раздѣлить не на $^{1}/_{5}$, а на $^{4}/_{5}$, т. е. на дѣлителя вчетверо большаго $^{1}/_{5}$, то для частнаго должно взять число *вчетверо менѣе* 115, т. е. $^{115}/_{4}$, или $28^{3}/_{4}$.

c) $23 : 4 = 5^{3}/_{4}$. Такъ какъ здѣсь дѣлитель взятъ въ пять разъ болѣе даннаго ($^{4}/_{5}$), то и частное $5^{3}/_{4}$ должно быть увеличено въ 5 разъ; $5^{3}/_{4} \times 5 = 25^{15}/_{4} = 28^{3}/_{4}$.

d) $23 = 24 - 1$; $24 : {}^{4}/_{5} = 5 \times 6 = 30$.

Но здѣсь дѣлимое взято единицею болѣе настоящаго, въ которой дѣлитель $^{4}/_{5}$ содержится $1^{1}/_{4}$ раза (ибо $1 : {}^{4}/_{5} = {}^{5}/_{4} = 1^{1}/_{4}$); поэтому, для полученія искомаго частнаго надобно изъ 30 вычесть $1^{1}/_{4}$, что и дастъ $28^{3}/_{4}$.

e) $23 = 20 + 3$; $20 : {}^{4}/_{5} = 5 \times 5 = 25$; $3 : {}^{4}/_{5} = {}^{15}/_{4} = 3^{3}/_{4}$; $25 + 3^{3}/_{4} = 28^{3}/_{4}$.

f) $23 \times 1 = 23$; $1 : {}^{4}/_{5} = {}^{5}/_{4}$; $23 \times {}^{5}/_{4} = {}^{115}/_{4} = 28^{3}/_{4}$.

Сколь важны для развитія ума такія различныя точки зрѣнія при рѣшеніи задачъ, въ томъ, кажется, послѣ приведенныхъ нами примѣровъ нельзя сомнѣваться.

Наконецъ выводы, получаемые отъ умноженія и дѣленія дробей, приводятъ насъ вообще къ точному опредѣленію дѣйствія умноженія.

Произведеніе, получаемое отъ умноженія цѣлыхъ чиселъ, одного на другое, всегда во столько разъ болѣе множимаго, сколько въ мно-

жителѣ заключается единицъ, частное же, отъ раздѣленія цѣлыхъ чиселъ, всегда менѣе дѣлимаго во столько разъ, сколько въ дѣлителѣ содержится единицъ: но не то бываетъ при умноженіи и дѣленіи дробей. Здѣсь результаты, получаемые отъ умноженія двухъ дробей, одной на другую, менѣе результатовъ, находимъ чрезъ дѣленіе тѣхъ же дробей. *Произведеніе всегда меньше множимаго въ томъ случаѣ, когда цѣлое или дробное число, также смѣшанное, множится на правильную дробь; напротивъ, частное всегда болѣе дѣлимаго, когда эти числа дѣлятся на правильную дробь.*

а. Умноженіе.

1) $5 \times {}^{3}/_{4} = 3^{3}/_{4}$ $(3^{3}/_{4} < 5)$
2) $7^{1}/_{6} \times {}^{2}/_{3} = 4^{7}/_{9}$ $(4^{7}/_{9} < 7^{1}/_{6})$
3) ${}^{2}/_{3} \times {}^{4}/_{5} = {}^{8}/_{15}$ $({}^{8}/_{15} < {}^{2}/_{3})$.

б) Дѣленіе.

1) $5 : {}^{3}/_{4} = 6^{2}/_{3}$ $(6^{2}/_{3} > 5)$
2) $7^{1}/_{6} : {}^{2}/_{3} = 10^{3}/_{4}$ $(10^{3}/_{4} > 7^{1}/_{6})$
3) ${}^{2}/_{3} : {}^{4}/_{5} = {}^{5}/_{6}$ $({}^{5}/_{6} > {}^{2}/_{3})$.

Слѣдовательно, чтобъ опредѣленіе умноженія имѣло мѣсто и для цѣлыхъ чиселъ и для дробныхъ, его надобно выразить такъ: *умноженіе есть такое дѣйствіе, посредствомъ котораго по двумъ числамъ* (множимому и множителю) *находятъ третіе, которое такъ составлено изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы.*

Приложеніе И.

Рѣшеніе различныхъ задачъ, относящихся къ такъ-называемымъ тройнымъ правиламъ (простому, сложному, товариществу, смѣшенію вещей, цѣнному и исчисленію процентовъ).

Задачи, относящіяся къ такъ-называемымъ *тройнымъ правиламъ*, въ большей части ариѳметическихъ книгъ рѣшаются помощію пропорцій; но уже мы прежде замѣтили (см. I отдѣленіе), что въ рѣшеніи такого рода задачъ легко можно обойдтись безъ этого *механическаго* пособія; напротивъ, гораздо проще и сообразнѣе съ наукою начальнаго исчисленія приводить разныя отношенія задачи къ единицѣ, для опредѣленія равенства между величинами извѣстными и неизвѣстными. Представимъ здѣсь нѣсколько рѣшеній возможноразно-

родныхъ вопросовъ, для убѣжденія въ томъ, что употребленіе пропорцій въ Ариѳметикѣ есть дѣло совершенно лишнее.

I. Задачи, относящіяся къ простымъ тройнымъ правиламъ.

1. На пару платья употреблено сукна $4^1/_4$ арш., шириною въ $1^3/_4$ арш. Сколько нужно употребить сукна шириною въ 2 арш. на такое же платье?

Рѣш. Расположимъ числа, входящія въ вопросъ, въ такомъ порядкѣ:

$$4^1/_4 \text{ арш.} \text{ ——— } 1^3/_4 \text{ арш.}$$
$$x \text{ ——— } 2 \quad »$$

Здѣсь подъ буквою x разумѣемъ искомое число.

Чѣмъ шире сукно, тѣмъ менѣе аршинъ пойдетъ его на платье, и обратно, чѣмъ уже сукно, тѣмъ болѣе его пойдетъ на платье. Если-бъ вмѣсто $1^3/_4$ арш. или $^7/_4$ арш. шириною, сукно имѣло только одинъ аршинъ ширины, то его пошло бы на платье во столько разъ болѣе $4^1/_4$ арш., во сколько $^7/_4$ болѣе 1. Слѣдовательно, сукна, шириною въ 1 арш., надобно употребить

$$4^1/_4 \times {}^7/_4 \text{ или } \frac{17 \times 7}{4 \times 4}.$$

Но сукно полагается въ 2 арш. шириною; поэтому, на тоже платье должно употребить его вдвое менѣе противъ сукна, имѣющаго 1 аршинъ ширины.

Итакъ,

$$x = \frac{17 \times 7}{4 \times 4 \times 2} = 3\frac{23}{32} \text{ арш. или 3 ар. } 11^1/_2 \text{ вершковъ.}$$

2. 15 человѣкъ оканчиваютъ извѣстную работу въ 8 дней; сколько понадобится людей, чтобъ окончить ее въ $6^2/_3$ дней?

Рѣшеніе.

$$15 \text{ ——— } 8 \quad \text{дн.}$$
$$x \text{ ——— } 6^2/_3 \quad »$$

Если для окончанія извѣстной работы въ 8 дней надобно имѣть 15 работниковъ, то въ 1 день, при тѣхъ же условіяхъ, потребовалось бы въ 8 разъ болѣе работниковъ, т. е. 8×15. Но на совершеніе работы назначено $6^2/_3$ или $^{20}/_3$ дня; поэтому, число работниковъ должно быть уменьшено въ $^{20}/_3$ раза.

Отсюда

$$x = \frac{8 \times 15}{^{20}/_3} = \frac{8 \times 15 \times 3}{20} = 2 \times 3 \times 3 = 18 \text{ чел.}$$

II. Задачи, относящіяся къ сложнымъ тройнымъ правиламъ.

3. Нѣкто въ пять дней, находясь въ дорогѣ по 8 часовъ, проѣхалъ 120 верстъ. Спрашивается: сколько верстъ проѣдетъ онъ въ 15 дней, когда будетъ ежедневно въ дорогѣ по 6 часовъ?

Рѣшеніе.

5 дней ———— 8 час. ——— 12 верстъ
12 » ———— 6 » ——— x »

Если въ 5 дней, находясь ежедневно въ дорогѣ по 8 часовъ, путешественникъ проѣхалъ 120 верстъ, то въ 1 день онъ проѣзжалъ $^{120}/_{5}$ верстъ, а въ 1 часъ $\frac{120}{5 \times 8}$. Поэтому, въ 6 часовъ проѣдетъ онъ въ 6 разъ болѣе послѣдняго числа, а въ 15 дней еще въ 15 разъ болѣе.

Итакъ,

$$x = \frac{120 \times 6 \times 15}{5 \times 8} = 15 \times 6 \times 3 = 270 \text{ в.}$$

4. 30 работниковъ, въ 15 дней, работая каждый день по 9 часовъ, сдѣлали мостовую въ 25 саженъ длины и въ 5 саженъ ширины. Во сколько дней 45 работниковъ окончатъ мостовую въ 60 саженъ длиною и въ 6 саженъ шириною, работая каждодневно по 12 часовъ?

Рѣшимъ эту задачу двоякимъ способомъ, основывая рѣшеніе, во-первыхъ, на пропорціяхъ, и, во-вторыхъ, на первыхъ четырехъ дѣйствіяхъ Ариѳметики.

Пусть x‴ есть искомое число дней работы; напишемъ однородныя количества подъ однородныя:

30 чел. 15 дней 9 час. 25 с. 5 с.
45 » x‴ 12 » 60 » 6 »

Если 30 человѣкъ, работая по 9 час. въ день, оканчиваютъ свое дѣло въ 15 дней, то чтобъ узнать, во сколько дней окончатъ эту работу 45 чел., работая по столько же часовъ въ день, надобно составить пропорцію:

30 чел. 15 дней } отношеніе
45 » x » } обратное

45 : 30 = 15 : x

Когда 30 человѣкъ въ 15 дней оканчиваютъ извѣстную работу, то 1 человѣку въ 30 разъ болѣе надобно употребить времени на совершеніе той же работы. Итакъ, 1 человѣкъ въ 15 × 30 дней окончитъ мостовую, длиною въ 25 саж., шириною въ 5 саж., работая ежедневно по 9 часовъ. Но еслибъ онъ работалъ только по 1 часу въ день, употребилъ бы на туже работу 15 × 30 × 9 дней. Сверхъ того, когда бы мостовая вмѣсто 25 саж. длины и 5 саж. ширины имѣла только по одной сажени длины и ширины, то тотъ же ра-

Работая по 9 часовъ въ день, работники оканчиваютъ мостовую (въ 25 саж. длины и 5 саж. ширины) въ x дней, а работая по 12 час. въ день окончатъ въ x′ дней, а именно по пропорціи:

9 ч. x дней } отношеніе
12 ч. x′ » } обратное

$12 : 9 = x : x'$

Для окончанія же мостовой, имѣющей 60 саж. длины, нужно дней:

25 саж. x′ } отношеніе
60 » x″ } прямое

$25 : 60 = x' : x''$

Наконецъ, если мостовая должна имѣть 6 саженъ ширины, то

5 саж. x″ } отношеніе
6 » x‴ } прямое

$5 : 6 = x'' : x'''$

Теперь соберемъ всѣ выведенныя пропорціи и перемножимъ ихъ между собою почленно:

$45 : 30 = 15 : x$
$12 : 9 = x : x'$
$25 : 60 = x' : x''$
$5 : 6 = x'' : x'''$

$45 \cdot 12 \cdot 25 \cdot 5 : 30 \cdot 9 \cdot 60 \cdot 6 = 15 : x'''$

$$x''' = \frac{15 \cdot 30 \cdot 9 \cdot 60 \cdot 6}{45 \cdot 12 \cdot 25 \cdot 5} = 21\ ^3/_5 \text{ дня.}$$

ботникъ привелъ бы дѣло къ концу въ 25×5 разъ скорѣе. Итакъ, 1 человѣкъ, работая въ день по 1 ч., окончилъ бы мостовую, имѣющую длины и ширины по 1 сажени,

$$\text{въ } \frac{15 \times 30 \times 6}{25 \times 5} \text{ дней.}$$

Поэтому, 45 чел. туже самую работу окончили бы въ 45 разъ скорѣе.

$$\text{т. е. } \frac{15 \times 30 \times 9}{45 \cdot 25 \cdot 5}$$

Если же вмѣсто 1 часа въ день, они станутъ работать по 12 часовъ, то еще въ 12 разъ скорѣе поспѣетъ дѣло,

$$\text{именно: } \frac{15 \times 30 \times 9}{45 \times 25 \times 5 \times 12} \text{ дней.}$$

Но какъ мостовая должна имѣть 60 саженъ длины и 6 саж. ширины, то работникамъ должно употребить въ 60×6 разъ болѣе времени противъ того, когда-бъ мостовая имѣла длины и ширины по 1 сажени.

Слѣдовательно,

$$x = \frac{15 \times 30 \times 9 \times 60 \times 6}{45 \times 25 \times 5 \times 12} = \frac{2 \times 9 \times 6}{5} = 21^3/_5 \text{ дня.}$$

Сравнивая оба изложенныя способа рѣшенія, легко убѣдиться, которому изъ нихъ должно отдать преимущество.

III. *Задачи, относящіяся къ правилу товарищества.*

Задачи, сюда относящіяся, имѣютъ цѣлію *раздѣлить между нѣ-*

сколькими членами общества (товарищества) прибыль или убыль, получаемую этимъ обществомъ сообразно вкладамъ каждаго члена. Очевидно, что все дѣло состоитъ здѣсь въ раздѣленіи какой-либо суммы на нѣсколько неравныхъ частей, соразмѣрно тѣмъ частнымъ вкладамъ, отъ которыхъ эта общая сумма произошла.

5. *Изъ трехъ купцовъ первый положилъ для торга 150 рублей, второй 250 руб. и третій 350 рублей. По прошествіи нѣкотораго времени они получили на свой складочный капиталъ 200 руб. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ долженъ взять изъ этой прибыли?*

Рѣшеніе.

$$\left.\begin{array}{ll} 1, \ldots\ldots & 150 \text{ р.} \\ 2, \ldots\ldots & 250 \text{ »} \\ 3, \ldots\ldots & 350 \text{ »} \end{array}\right\} 200 \text{ р.}$$

$$\overline{\quad 750 \quad}$$

Если на 750 руб. получено 200 руб. прибыли, то на 1 руб. будетъ въ 750 разъ менѣе, т. е. $^{200}/_{750}$ или $^{4}/_{15}$ рубля. Получивъ прибыль съ 1 рубля, не трудно узнать сколько получится прибыли съ 150, 250 и 350 рублей.

Слѣдовательно,

$$1 \text{ купецъ получилъ } \frac{150 \times 4}{15} = 40 \text{ р.}$$

$$2 \quad » \quad » \quad \frac{250 \times 4}{15} = 66^2/_3 \text{ »}$$

$$3 \quad » \quad » \quad \frac{350 \times 4}{15} = 93^1/_3 \text{ »}$$

$$\overline{\quad 200 \text{ р.}}$$

6. *Одинъ купецъ положилъ въ общій торгъ 75 руб. на 3 мѣсяца, другой 25 руб. на 5 мѣсяцевъ, третій 15 руб. на 10 мѣсяцевъ; они получили прибыли 80 руб. Спрашивается: какъ должно раздѣлить между ними эту прибыль?*

Рѣшеніе. Приведемъ сперва всѣ вклады къ одному отношенію, именно къ 1 мѣсяцу. Чтобы вкладъ, обращающійся въ торговлѣ только одинъ мѣсяцъ, могъ принести туже самую прибыль, какую приносятъ 75 руб., положенные на 3 мѣсяца, необходимо, чтобъ этотъ вкладъ былъ втрое болѣе 75 рублей. Поэтому, сумма въ 225 руб., положенная на 1 мѣсяцъ, равняется суммѣ въ 75 р., положенныхъ на 3 мѣсяца. Равнымъ образомъ, 5×25 руб. или 120 руб., положенные также на 1 мѣсяцъ, все тоже, что 25 руб., обращающіеся въ торговлѣ 5 мѣсяцовъ, и, наконецъ, 150 руб., положенные

также на 1 мѣсяцъ, равны 15 руб., положеннымъ на 10 мѣсяцевъ. Поэтому, сумма въ 225 + 125 + 150 или 500 руб., обращающаяся въ торговлѣ только 1 мѣсяцъ, принесла прибыли 80 руб. Когда на 500 руб. получено 80 руб., то на каждый рубль причитается $^{80}/_{500}$ или $^{8}/_{50}$ руб.

Итакъ, первый купецъ получитъ $\frac{225 \times 8}{50} = 36$ руб.

второй » » $\frac{125 \,.\, 8}{50} = 20$ »

третій » » $\frac{150 \,.\, 8}{50} = 24$ »

80 руб.

7. *Нѣкто по смерти своей оставилъ четырехъ наслѣдниковъ, для которыхъ сдѣлалъ слѣдующее завѣщаніе: первый изъ нихъ долженъ получить изъ всего имущества $^{1}/_{6}$, второй — $^{2}/_{5}$, третій — $^{4}/_{9}$, а четвертый — $^{1}/_{3}$. Спрашивается: сколько каждый долженъ получить изъ наслѣдства, состоящаго въ 40000 рубляхъ?*

Рѣшеніе. Еслибъ сумма четырехъ данныхъ долей равнялась 1, то легко было бы исполнить условіе завѣщанія: надлежало бы только опредѣлить постепенно сперва 6-ю часть отъ 40000 руб., потомъ $^{2}/_{5}$ и т. д.; но, по приведеніи дробей $^{1}/_{6}$, $^{2}/_{5}$, $^{1}/_{9}$, $^{1}/_{3}$ къ одинакому знаменателю, находимъ, что сумма ихъ равняется $1^{31}/_{90}$, т. е. выводъ больше единицы. Поэтому, легко замѣтить, что не досталобъ наслѣдства, еслибъ каждому выдать то, что по завѣщанію опредѣлено. Однакожъ наслѣдство должно быть раздѣлено соразмѣрно числамъ: $^{1}/_{6}$, $^{2}/_{5}$, $^{4}/_{9}$ и $^{1}/_{3}$, или все тоже, что числамъ (по приведеніи этихъ дробей къ одинакому знаменателю, принимая въ разсмотрѣніе только ихъ числителей): 15, 36, 40, 30. Но сумма послѣднихъ = 121. Слѣдовательно, 40000 руб. надобно раздѣлить на 4 части, соразмѣрно числамъ: 15, 36, 40, 30.

Выводы:

1-я часть $= \frac{15 \,.\, 40000}{121} =$ 4958 руб. $67^{93}/_{121}$ коп.

2-я » $= \frac{36 \,.\, 40000}{121} =$ 11900 » $82^{78}/_{121}$ »

3-я » $= \frac{40 \,.\, 40000}{121} =$ 13223 » $14^{6}/_{121}$ »

4-я » $= \frac{30 \,.\, 40000}{121} =$ 9917 » $35^{65}/_{121}$ »

Примѣчаніе. Изъ рѣшенія этого рода задачъ дѣлается очевиднымъ, что вся трудность состоитъ здѣсь не въ какихъ-либо особыхъ пра-

видахъ и пріемахъ исчисленія, а единственно въ однихъ соображеніяхъ условіи задачи. Во всѣхъ задачахъ этого рода, въ общности разсматриваемыхъ, рѣшается одинъ и тотъ же вопросъ: *какимъ образомъ раздѣлить число на нѣсколько неравныхъ частей, соразмѣрно другимъ даннымъ числамъ, предварительно приведеннымъ къ однородности.*

IV. Задачи, относящіяся къ правилу соединенія или цѣнному (переводному).

Цѣль задачъ этого рода состоитъ въ *опредѣленіи отношенія монетъ* (также прочихъ мѣръ) *двухъ государствъ, когда притомъ отношенія этихъ монетъ къ монетамъ другихъ государствъ предполагаются извѣстными или данными.* Это дѣйствіе потому назвали правиломъ *соединенія* или *цѣннымъ*, что въ немъ соединяются различныя отношенія въ одно.

8. Если 50 ливровъ парижскихъ равняются 51 ливру гамбургскому, а 25 ливровъ гамб. составляютъ 24 ливра франкфуртскихъ, то требуется узнать, какой части франкфуртскаго ливра равняется 1 парижскій ливръ?

Ясно, что 50 париж. ливр. = 51 гамб.
25 гамб. » = 24 франкф.

Если 25 гамб. ливровъ равняются 24 франкф., то 1 гамб. = $^{24}/_{25}$ франкфурт.; поэтому, 50 париж. ливровъ или 51 гамб. = $\frac{51 \times 24}{25}$, а 1 париж. = $\frac{51.24}{50.25} = \frac{612}{625}$ франкфурт.

V. Задачи, относящіяся къ правилу смѣшенія.

Задачи этого рода бываютъ двухъ родовъ: *1) когда по нѣсколькимъ разнымъ сортамъ какого-либо вещества, причемъ извѣстно число и достоинство каждаго сорта, требуется опредѣлить средній сортъ; 2) когда требуется опредѣлить количество каждаго сорта, входящаго въ составъ смѣси, по данной цѣнѣ или достоинству какъ каждаго сорта въ особенности, такъ и всей смѣси вообще.*

9. Нѣкто имѣетъ двухъ сортовъ порохъ: 100 фунт. перваго сорта, изъ которыхъ каждый стоитъ по 1 р. 20 коп., и 35 фунт. втораго, по 85 коп. за фунтъ; онъ желаетъ знать: если весь имѣющійся у него порохъ смѣшать вмѣстѣ, то почемъ обойдется ему фунтъ смѣшаннаго пороху?

Рѣшеніе. Опредѣлимъ сперва количество всего пороха, который здѣсь нужно смѣшать вмѣстѣ.

100 ф., по 120 к. за фунтъ = 120 р.
35 » » 85 » » » = 29 » 75 к.
135 » смѣси стоитъ 149 » 75 »

Значитъ, что 1 ф. смѣси $= \frac{14975}{135} = \frac{2995}{27} = 1$ р. $10^{25}/_{27}$ к.

10. Одинъ виноторговецъ имѣетъ вино двухъ сортовъ: ведро вина перваго сорта стоитъ 36 р., а втораго — 20 р. Онъ хочетъ смѣшать эти вина въ такомъ количествѣ, чтобы получить 50 ведеръ и продавать каждое, безъ барыша и убытка, по 30 р. Спрашивается: сколько онъ долженъ взять ведеръ каждаго сорта, чтобы получить искомую смѣсь?

Рѣшеніе. Изъ условій задачи видно, что на каждое ведро перваго сорта вина, входящаго въ составъ смѣси, получается убытку 6 рублей, а на каждое ведро втораго сорта, напротивъ, прибыли 10 руб. Поэтому, перваго сорта вина должно взять болѣе въ смѣшеніе, нежели втораго, потому что убытокъ съ перваго менѣе прибыли со втораго, виноторговецъ же не хочетъ получить отъ продажи смѣшаннаго вина ни барыша, ни убытка. Такъ какъ на каждое ведро перваго сорта вина 6 рублей убытку, а на каждое ведро втораго сорта 10 рублей прибыли, то перваго сорта должно взять во столько разъ больше втораго, во сколько 10 болѣе 6, т. е. въ $^5/_3$ раза.

Итакъ, если втораго сорта возьмется 1 ведро, то перваго должно взять $^5/_3$ ведра. Отсюда понятно, что вопросъ приводится къ раздѣленію числа 50 на двѣ неравныя части, соразмѣрно числамъ $^5/_3$ и 1, или $^5/_3$ и $^3/_3$, или проще 5 и 3.

$50 : 8 = 6^1/_4$
$6^1/_4 \times 5 = 31^1/_4$ вед. перваго сорта.
$6^1/_4 \times 3 = 18^3/_4$ » втораго »

Повѣрка.

$31^1/_4$ вед. по 36 руб. каждое	1125 р.
$18^3/_4$ » » 20 » »	375 »
50 ведеръ	1500 р.

Отсюда одно ведро стоитъ 30 руб.

VI. Задачи, относящіяся къ исчисленію процентовъ и учету векселей.

11) Требуется узнать, сколько получится съ 5000 рублей за 2

года и 9 мѣсяцевъ, по $3^1/_2\%$ въ годъ, считая проценты на проценты.

Рѣшеніе. Вычислимъ сперва проценты за 1 годъ. Если со 100 получается $3^1/_2$ или $^7/_2$, то съ 1 руб. — $^7/_{200}$ руб.; поэтому съ 5000 р. $\frac{7 \times 5000}{200} = 175$ руб. Итакъ, по прошествіи года капиталъ возрастетъ до 5175 рублей. Исчислимъ теперь проценты съ капитала 5175 еще за годъ.

Съ 1 руб. $^7/_{200}$ р.,

съ 5175 р. . . . . . . $\frac{5175.7}{200} = 181$ р. $12^1/_2$ коп.

Такимъ образомъ первоначальный капиталъ по прошествіи двухъ лѣтъ возрастетъ до 5356 р. $12^1/_2$ коп.

Наконецъ, исчислимъ проценты съ капитала 5356 р. $12^1/_2$ к. еще за годъ, и потомъ возьмемъ отъ полученныхъ процентовъ $^3/_4$, потому что капиталъ обращается въ процентахъ не весь третій годъ, а только 9 мѣсяцевъ, что отъ цѣлаго года составляетъ $^3/_4$.

Выйдетъ:

5356 р. $12^1/_2$ к. $\times \frac{7}{200} \times {^3/_4} = \frac{535612 \times 21}{64} = 140$ р. $59^{53}/_{64}$ коп.

Слѣдовательно, всѣхъ процентовъ за требуемое время будетъ 496 р. $72^{21}/_{64}$ коп.

12) Каковъ первоначальный капиталъ, который по прошествіи года обратился въ 2000 руб., принеся 8 процентовъ со ста?

Рѣшеніе. Если вмѣсто каждыхъ ста рублей получается по прошествіи года 108 руб., то значитъ, что первоначальный капиталъ составляетъ отъ 2000 руб. $^{100}/_{108}$ или $^{25}/_{27}$.

Итакъ, $\frac{2000.25}{27} = \frac{50000}{27} = 1851$ руб. $85^5/_{27}$ коп.

13) Въ какое время капиталъ въ 1000 р., отданный въ банкъ по 4%, принесетъ 48 руб. процентовъ?

Рѣшеніе. 48 руб. процентовъ получены съ 1000 р., значитъ съ 1 руб. прибыль равняется $^{48}/_{1000}$. Но, по условію задачи, годовые проценты составляютъ отъ капитала $^{40}/_{1000}$. Итакъ, во сколько разъ 48 болѣе 40, во столько разъ болѣе 1 года капиталъ въ 1000 руб. долженъ обращаться въ банкѣ, для полученія съ него 48 руб. процентовъ, т. е. $^{48}/_{40}$ или $^6/_5$ года, что составляетъ 1 годъ 2 мѣсяца и 12 дней.

14) *Учесть вексель въ 1200 руб., данный на годъ по 6%, но уплаченный за 4 мѣсяца до срока.*

Рѣшеніе. Если въ годъ 6%, то въ 4 мѣсяца 2%. Поэтому, четырехмѣсячный учетъ съ каждой сотни равенъ 2 р., или все тоже, каждые 102 руб., платимые по истеченіи четырехмѣсячнаго срока, обращаются въ 100 р., платимыхъ за 4 мѣсяца впередъ. Поэтому, дѣйствительная цѣна векселя составляетъ отъ 1200 руб. часть равную $^{100}/_{102}$.

Отсюда

$$x = \frac{1200.100}{102} = 1176 \text{ р. } 47^3/_{51} \text{ коп.}$$

15) *Каковъ долженъ быть дѣйствительный капиталъ билета въ 2850 руб. 45 к., уплачиваемаго въ 2 года и 8 мѣсяцевъ, полагая по $8^3/_4$ процента въ годъ?*

Рѣшеніе. Каждые 100 руб. приносятъ въ годъ $8^3/_4$ р., а по прошествіи 2 лѣтъ и 8 мѣсяцевъ, считая простые проценты, $8^3/_4 \times 2^2/_3 = {}^{70}/_3$ руб. Итакъ, дѣйствительная цѣна билета

$$\frac{2850 \text{ р. } 45 \text{ к.} \times 100}{100 + {}^{70}/_3} = \frac{2850 \text{ р. } 45 \text{ к.} \times 100 \times 3}{370} = 2311 \text{ р. } 17\frac{21}{37} \text{ коп.}$$

Заключеніе. Мы съ намѣреніемъ взяли здѣсь большое число задачъ и разнообразнаго содержанія, чтобъ окончательно доказать, что четырехъ основныхъ правилъ достоточно для рѣшенія всѣхъ возможныхъ ариѳметическихъ вопросовъ. Очевидно, что все ихъ разнообразіе заключается въ содержаніи, но никакъ не въ пріемахъ исчисленія, которые остаются неизмѣнными. *Умѣть сообразить данныя величины предложенной задачи и опредѣлить отношенія между ними и величиною искомою* — вотъ въ чемъ вся сила и на что преимущественно надобно обращать вниманіе въ преподаваніи. Подведеніе же задачъ подъ разныя рубрики, какъ-то: тройнаго правила, простаго и сложнаго, товарищества и проч. не только не приноситъ существенной пользы, а еще безъ нужды удручаетъ память учащагося и заслоняетъ предъ нимъ прямой взглядъ на вещи. Это такія же выдумки схоластическаго ученія, какъ хріи въ риторикѣ. Если нужно упомянуть учащемуся о всѣхъ этихъ лишнихъ терминахъ ариѳметическихъ, усвоенныхъ давностію времени, то развѣ только съ исторической точки зрѣнія. И потому преподаватель пойметъ, что если мы здѣсь приводимъ всѣ эти названія, то отнюдь не съ тою цѣлію, чтобы въ практикѣ нужно было ему распредѣлять задачи по всѣмъ этимъ рубрикамъ; ибо логическая точность науки не только не постра-

даетъ, а еще выиграетъ, когда онъ будетъ въ классѣ предлагать задачи вразбивку, нисколько не стѣсняясь искуственнымъ порядкомъ, какой онъ находитъ въ ариѳметическихъ руководствахъ.

Въ предлежащихъ упражненіяхъ содержится все, что мы считали нужнымъ сказать о преподаваніи ариѳметики въ классахъ. Что касается до десятичныхъ дробей, то опытъ доказываетъ, что изученіе ихъ не представляетъ особенной трудности для учащихся, которые хорошо ознакомлены съ простыми дробями. То изложеніе, которое находится въ большей части новѣйшихъ курсовъ ариѳметики, весьма достаточно для основательнаго изученія этого рода дробей. О дробяхъ же непрерывныхъ не время еще здѣсь распространяться, такъ какъ настоящее изслѣдованіе ихъ принадлежитъ алгебрѣ; довольно, если ученики будутъ умѣть находить одну или двѣ приближенныя величины какой-либо дроби, выраженной въ большихъ числахъ и, для сокращенія выкладокъ, замѣнять ими такую дробь.

Заканчивая мой конспектъ, считаю не лишнимъ помѣстить здѣсь два отзыва отъ правительственныхъ учрежденій о моей ариѳметикѣ. Бывшій издатель этой книги, книгопродавецъ Я. А. Исаковъ просилъ меня дозволить ему, въ видахъ своихъ разсчетовъ, представить ее на разсмотрѣніе: во-первыхъ, Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія и, во-вторыхъ, Учебнаго Комитета, учрежденнаго при IV Отдѣленіи собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи. Г. Исаковъ желалъ заручиться одобрительнымъ отзывомъ о моей книгѣ отъ этихъ почтенныхъ учрежденій, безъ чего, по его мнѣнію, книга не могла бы достаточно распростаниться. Я, конечно, не могъ препятствовать ему въ приведеніи въ исполненіе такого благопріятнаго для него намѣренія, разумѣется, съ оговоркою, что я, съ своей стороны, не могу въ этомъ случаѣ ни въ чемъ ему содѣйствовать. Вотъ эти отзывы:

«1. Выписка изъ утвержденнаго 24 августа 1871 г. исправляющимъ должность Главноуправляющаго IV Отдѣленіемъ собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи Журнала Учебнаго Комитета.

Въ Учебномъ Комитетѣ разсмотрѣна:

Практическая ариѳметика Петра Гурьева. С.П.Б. 1870 года. Названный трудъ достопочтеннаго педагога, съ перваго выхода своего

въ свѣтъ, пользовался и продолжаетъ пользоваться заслуженнымъ вниманіемъ всѣхъ лицъ, серьезно-занимающихся вопросомъ объ элементарномъ и среднемъ обученіи юношества, что доказываетъ, между прочимъ, выходъ его въ свѣтъ четвертымъ изданіемъ. Строгій психологическій анализъ математическихъ отправленій мысли и вытекающая оттуда образцовая постепенность въ развитіи и расположеніи послѣдовательныхъ упражненій, предлагаемыхъ учащимся, постоянное возбужденіе ихъ къ самостоятельности чрезъ разрѣшеніе многочисленныхъ задачъ — чрезвычайно умныхъ и разнообразныхъ — отводятъ труду г. Гурьева почетное мѣсто между нашими педагогическими изданіями. Учебный Комитетъ, согласно съ мнѣніемъ рецензента, считаетъ совершенно справедливымъ *новое изданіе своего бывшаго сочлена рекомендовать учебнымъ заведеніямъ вѣдомства какъ прекрасное руководство при обученіи ариѳметикѣ во всѣхъ классахъ женскихъ институтовъ и гимназій.*»

«2. Выписка изъ журнала Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Въ засѣданіи Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія слушали (ст. 11) нижеслѣдующее мнѣніе о книгѣ «*Практическая Ариѳметика*». Составленная Петромъ Гурьевымъ, 2-е изданіе С.-пб. 1871-й, и представленная издателемъ оной, книгопродавцемъ Яковымъ Исаковымъ, въ Ученый Комитетъ съ просьбою разсмотрѣть и рекомендовать учебнымъ заведеніямъ, если она окажется того достойною.»

«Означенный курсъ ариѳметики, какъ видно изъ предисловія, составленъ г. Гурьевымъ изъ двухъ сочиненій его «*Руководство къ преподаванію ариѳметики малолѣтнимъ дѣтямъ*» и *Ариѳметическихъ листковъ.* Первое предназначалось собственно для молодыхъ наставниковъ и тѣхъ родителей, преимущественно матерей, которые захотѣли бы сами руководить занятіями своихъ дѣтей, второе же заключаетъ въ себѣ собраніе задачъ съ ихъ рѣшеніями. Изъ этихъ-то двухъ книгъ и составилъ свой курсъ «Практической ариѳметики» г. Гурьевъ, причемъ онъ имѣлъ въ виду дать возможность обойтись при изученіи ариѳметики безъ помощи руководства, за исключеніемъ крайнихъ случаевъ. Имѣя въ виду такую особенную цѣль при составленіи своей «Практической ариѳметики», г. Гурьевъ не стѣснялся требованіями системы преподаванія ариѳметики, системы обще-принятой въ нашихъ училищахъ (?). Такъ между статьями *о вычитаніи и дѣлимости чиселъ* не превосходящихъ 100 (стр. 31) помѣщена статья

объ употребительныхъ мѣрахъ длины, вѣса и проч. Таже статья съ нѣкоторыми дополненіями помѣщена послѣ статьи *объ измѣняемости частнаго, происходящаго отъ различныхъ измѣненій дѣлимаго и дѣлителя* (стр. 132). Таже статья съ новыми прибавленіями встрѣчается въ третій разъ на стр. 216—222 и между двумя статьями, которыя никогда не раздѣляются: статьею *о приведеніи дробей къ одному знаменателю* и статьею о сложеніи и вычитаніи дробей, — дѣйствіяхъ, для которыхъ нужно приведеніе дробей къ одному знаменателю (?!). Въ статьѣ о десятичныхъ дробяхъ (стр. 246), прежде чѣмъ показать, что всякая безконечная дробь, происходящая отъ обращенія обыкновенной дроби въ десятичную, будетъ *періодическая*, говорится о приведеніи безконечныхъ дробей въ простыя, возможномъ только въ случаѣ ихъ періодичности. Въ статьѣ о разложеніи чиселъ на простые множители (стр. 127) не объяснено, до какого предѣла нужно пробывать дѣленія на различныя *простыя* числа, а послѣ говорится объ этомъ только по отношенію къ числу 347 (стр. 128) *).

«На основаніи всего вышесказаннаго «Практическая ариѳметика» г. Гурьева не можетъ быть принята въ число руководствъ, употребляемыхъ въ низшихъ училищахъ. *Опредѣлено*: согласиться съ изъясненнымъ заключеніемъ и представить о семъ на благоусмотрѣніе г. товарища министра Народнаго Просвѣщенія» **).

Издатель моей книги Я. А. Исаковъ просилъ меня, для бо̀льшаго ея распространенія, измѣнить въ ней тѣ мѣста, которыя по указанію Ученаго Комитета подлежали исправленію. На его просьбу я только улыбнулся. Впрочемъ г. Исаковъ не былъ въ убыткѣ отъ двухъ изданій моей книги.

---

*) Объяснено и со всею ясностію, а число 347 взято только для примѣра.

**) Вотъ и весь судъ Соломоновъ, изрекшій остракизмъ книгѣ изъ учебныхъ заведеній министерства! Одно, за что въ особенности можно похвалить ученыхъ систематиковъ, — это ихъ неизмѣнная преданность традиціямъ, получившимъ начало съ самаго учрежденія министерства. Все, что произвела педагогика въ теченіе нынѣшняго столѣтія, до нихъ во все не касается. Объ этомъ у меня достаточно сказано въ третьей брошюрѣ моей о земскихъ вопросахъ, озаглавленной «*О народномъ образованіи*», стр. 91—97. С.-пб. 1872 г. Къ тому же ложно понятая рецензентомъ ссылка, на-скоро сдѣланная мною въ предисловіи къ «Практической Ариѳметикѣ» на два предшествующія мои сочиненія, послужила ему единственнымъ стимуломъ для оцѣнки моей книги. Зачѣмъ еще трудиться надъ анализомъ ея, подумалъ онъ, чтобы сказать о ней правдивое слово, когда самъ авторъ указываетъ на ея компилятивный характеръ, да притомъ есть еще и особыя причины не давать ей ходу!

Есть и еще отзывы, о которыхъ слѣдуетъ упомянуть по ихъ курьозности. Г. Евтушевскій въ III отдѣлѣ своей «Методики» (стр. 49) вотъ какъ отзывается о моей книгѣ: «На русскомъ языкѣ имѣется весьма хорошо составленное по плану Генцеля (Генцель? — Да этого я совсѣмъ не знаю!) руководство «Практическая Ариѳметика Гурьева.» Только на первой степени сдѣлано видоизмѣненіе, именно сложеніе и вычитаніе разсматриваются отдѣльно, а приведены упражненія, какъ выводы изъ упражненій на сложеніе и вычитаніе. Кромѣ того добавлены статьи, каковы: десятичныя дроби, непрерывныя дроби, нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія, пропорціи и рѣшенія задачъ на различныя правила посредствомъ пропорцій. Представляя весьма полную разработку всего курса Ариѳметики и заключая въ себѣ много практическихъ задачъ, руководство это отличается отъ руководства Генцеля однимъ достоинствомъ, что оно не такъ разтянуто и болѣе примѣнимо при прохожденіи курса въ нашихъ среднихъ общеобразовательныхъ заведеніяхъ, хотя, безъ сомнѣнія, первыя четыре степени, особенно подробно и обстоятельно изложенныя, могутъ быть только руководствомъ для учителя, а не для ученика.» Можно ли такъ беззастѣнчиво облыгать другаго и вмѣстѣ противорѣчить самому себѣ! Съ одной стороны, мой трудъ чуть ли не построчный переводъ какого-то мнѣ совершенно неизвѣстнаго Генцеля, котораго, повидимому, г. Евтушевскій имѣлъ для себя образцомъ; съ другой, въ немъ добавлено такъ много, что сумма добавленнаго едва ли не превышаетъ вдвое позаимствованнаго; съ третьей, моя книга болѣе примѣнима при прохожденіи курса въ нашихъ среднеобразовательныхъ заведеніяхъ, а между тѣмъ оказывается годной только для учителя, а не для ученика!? Но почему только *для учителя*, а не *для ученика* — въ этомъ-то и секретъ г. Евтушевскаго. Назвать меня компиляторомъ какого-то Генцеля, мнѣ вовсе неизвѣстнаго, или проще копіистомъ его нужно было чтобы скрыть свои позаимствованія отъ меня, и тѣмъ вдругъ убить двухъ зайцевъ: избѣгнуть справедливыхъ нареканій и вмѣстѣ уронить чужой совѣстливый трудъ, который такъ мѣшалъ эксплоатаціямъ г. Евтушевскаго. Пусть-молъ этотъ трудъ расходится по школьнымъ библіотекамъ, но не должно быть ему, въ ущербъ эксплоататоровъ, въ рукахъ учениковъ. Премышленная клика, къ которой принадлежитъ и г. Евтушевскій, не съ однимъ моимъ трудомъ поступила такъ безцеремонно. Но и для этой клики наступаетъ теперь время разсчета. О вторахъ этого солиста: г. Вулихѣ, о неизвѣстномъ

рецензентѣ «Голоса» (№ 86 — 1880 г.) и иныхъ прочихъ и говорить больше не приходится.

О нашихъ писателяхъ новой школы можно вообще сдѣлать заключеніе въ немногихъ словахъ:

1. Неоспоримо, они отошли на большое разстояніе отъ министерскихъ регулятивовъ, состоящихъ до сихъ поръ въ своемъ вождѣленномъ statu quo, и въ этомъ ихъ большая заслуга нашему убогому просвѣщенію. Впрочемъ имъ во многомъ пособляетъ то промышленное направленіе, которое въ настоящее время обхватило все и проникло повсюду, даже въ скромную сферу школьной жизни. *)

2. Но та бѣда, что они уже черезчуръ пересолили въ подражаніи нѣмецкимъ педагогамъ, которые сами оказываются теперь на распутіи, почуявъ свѣжее вѣяніе новаго времени.

3. Новое время требуетъ выдѣленія каждой личности, обособленіе самобытности каждаго члена общества, а потому требуетъ отъ каждаго учащагося самостоятельныхъ работъ, а не голословнаго заучиванія уроковъ, наши же педагоги только и знаютъ, что пляшутъ съ маріонетками на трапеціи «наглядности» Песталоцци, съ калейдоскопами въ рукахъ, и все подводятъ подъ одни искуственныя нормы. Формы и формы поглощаютъ все обученіе, а оттого-то и въ жизни только и натыкаетесь, что на формалистовъ. Духа нѣтъ, что же намъ въ вашей буквѣ?

4. Правило, что учитель — все, а ученики — ничего, что ученикъ автоматъ, вложить въ котораго душу дѣло учителя есть своего рода іезуитизмъ. Не мудрено, что новѣйшая школа стоитъ теперь въ такомъ разладѣ съ жизнію, съ которою однакожь приходится считаться каждому, и тотчасъ по освобожденіи его изъ-подъ школьной ферулы. Нынѣ живется больно скоро.

П. Гурьевъ.

---

*) Въ каталогѣ книгопродавца Н. Фену и К° насчитывается до 14 разныхъ снарядовъ, стоимостію до 50 р., которые считаются теперь необходимыми для успѣшнаго преподаванія Ариѳметики! За всѣ ариѳметическія книжки Евтушевскаго, разгонисто напечатанныя, требуютъ теперь съ ученика до 3-хъ рублей! Вотъ какъ дорого приходится теперь учиться вамъ, бѣдныя дѣти!

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

О ДѢЛИТЕЛЯХЪ.

Общее примѣчаніе. Въ этой второй книгѣ «Практической Ариѳметики» содержится подробное изложеніе дробей простыхъ, десятичныхъ и непрерывныхъ, а также изложеніе способовъ рѣшать болѣе трудныя и сложныя задачи, которыя обыкновенно относятъ къ такъ-называемымъ тройнымъ правиламъ и рѣшаютъ помощію пропорцій или безъ нихъ. Изъ того уже, что было изложено въ первой книгѣ этого руководства, легко понять, что здѣсь поведется рѣчь не о какихъ-либо новыхъ дѣйствіяхъ надъ дробными числами, такъ какъ для всѣхъ родовъ чиселъ имѣется въ ариѳметикѣ только четыре дѣйствія, но собственно о *сокращеніи* и *видоизмѣненіи* цифровыхъ выкладокъ. Всѣ эти сокращенія и видоизмѣненія производимъ съ тою цѣлію, чтобы представляющіяся намъ отношенія между дробными числами обращать въ равнозначащія имъ отношенія между цѣлыми числами, съ которыми уже проще справляться. Изъ § 21 первой книги видно, что дробь $^{16}/_{24}$, чрезъ сокращеніе ея числителя и знаменателя въ 8 разъ, получаетъ простѣйшій видъ $^{2}/_{3}$, или 2 : 3; т. е. 2 раздѣлить на 3. Примѣръ, приведенный въ § 48 той же книги, еще болѣе доказываетъ важность сокращеній при производствѣ выкладокъ. Рѣшеніе этого примѣра, или задачи, привело сначала къ слѣдующему дробному выводу

$$\frac{510 \times 25 \times 35}{28 \times 15},$$

но потомъ, когда эти сложные множители, какъ въ числителѣ такъ

и въ знаменателѣ, были разложены на простыхъ множителей, этотъ выводъ принялъ такой видъ:

$$\frac{3 . 2 . 85 . 5 . 5 . 5 . 7}{2 . 2 . 7 . 3 . 5}$$

Здѣсь общіе множители, какъ въ дѣлимомъ такъ и въ дѣлителѣ, именно: 3, 2, 5, 7, были исключены, и оказалось сокращенное выраженіе

$$\frac{85 . 5 . 5}{2} = \frac{2125}{2} =$$

$$2125 : 2 = 1062^1/_2.$$

И не только изъ этихъ примѣровъ, но изъ многихъ другихъ можно было достаточно удостовѣриться, что *сокращеніе* и *видоизмѣненіе* разныхъ отношеній между числами, выраженными въ цифрахъ, составляютъ такъ-сказать душу всякаго вычисленія, и кто пріобрѣтетъ навыкъ и успѣхъ употреблять ихъ всякій разъ кстати и во время, при самомъ производствѣ выкладокъ и по мѣрѣ ихъ наростанія, для того исчисленіе дробями не представитъ ни малѣйшей трудности. Въ видахъ-то собственно этого навыка и этого умѣнья упрощать выкладки и вводится въ ариѳметику много частныхъ правилъ, напримѣръ о дѣлимости чиселъ, о нахожденіи общаго дѣлителя двухъ или болѣе чиселъ и проч., хотя, нѣтъ сомнѣнія, что чрезъ тѣ же *сокращенія* и *видоизмѣненія* скорѣе всего выясняются и нѣкоторые изъ общихъ свойствъ чиселъ. Но всѣ эти частныя правила главнымъ образомъ основываются на слѣдующемъ общемъ положеніи: *по данному произведенію и одному изъ множителей опредѣлить другаго множителя;* или, другими словами: *разложить какое-либо сложное произведеніе на его простыхъ множителей* (§§ 23 и 35 первой книги). Очевидно, что этотъ вопросъ рѣшается чрезъ дѣленіе. Такимъ образомъ теорія о дѣлителяхъ, насколько она возможна въ тѣсныхъ предѣлахъ ариѳметическихъ дѣйствій, именно дѣйствій надъ числами, выраженными частными знаками, каковы суть цифры, а не общими, каковы буквы въ алгебрѣ, должна предшествовать всѣмъ прочимъ отдѣламъ этой второй книги.

§ 1.

Тѣ числа, на которыя какое-либо число дѣлится безъ остатка, называются его *дѣлителями,* по преимуществу. Такъ числа: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 суть дѣлители числа 36; потому что число 36 дѣ-

лится на каждое изъ нихъ безъ остатка, или *нацѣло*. Такъ какъ всякое число дѣлится безъ остатка на само себя и на 1, то эти числа обыкновенно и не принимаются за дѣлителей. Если какое-либо число дѣлится *нацѣло* только на само себя и на 1, то оно называется *первымъ;* въ противномъ случаѣ — *сложнымъ*. Число 7 *первое*, потому что оно не дѣлится *нацѣло* ни на какое число, кромѣ 7 и 1; но число 6 есть *сложное*, ибо оно, кромѣ того, что дѣлится на 6 и 1, дѣлится еще безъ остатка и на 2 и на 3.

Задача. Отыскать всѣ первыя числа отъ 1 до 100.

Рѣшеніе. Первыя числа между 1 и 100 суть: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Задача. Отыскать всѣхъ дѣлителей числа 48.

Рѣшеніе. Дѣлители числа 48 суть: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24.

Задача. Опредѣлить дѣлителей числа 36.

Рѣшеніе. Дѣлители числа 36 суть: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.

Сравнивая взаимно дѣлителей чиселъ 48 и 36, находимъ, что между ними есть общіе, а именно: 2, 3, 4, 6, 12. Итакъ, *общими* дѣлителями *двухъ, трехъ и болѣе данныхъ чиселъ* называются такія числа, которыя дѣлятъ безъ остатка, *нацѣло*, каждое изъ данныхъ чиселъ.

Изъ общихъ дѣлителей двухъ или нѣсколькихъ чиселъ тотъ, который больше всѣхъ, называется *наибольшимъ общимъ дѣлителемъ*. Такъ число 12 есть *наибольшій* общій дѣлитель чиселъ 48 и 36.

Задача. *Отыскать всѣхъ дѣлителей чиселъ 96 и 144, и потомъ показать, какіе изъ нихъ общіе и который наибольшій.*

Два или болѣе чиселъ, которыя не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, кромѣ единицы, называются *первыми между собою числами;* напр. 17 и 19, 23 и 25, 81 и 92 и проч. Не забудьте *первыми между собою*, но не просто первыми; числа *первыя между собою* могутъ быть и не первыя, если ихъ разсматривать поодиночкѣ. Такъ числа 81 и 92, будучи первыми между собою, ибо не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, не суть однакожь первыя числа, сами по себѣ, потому что 81 дѣлится безъ остатка на 3, 9, 27, а 92 на 2, 4, 23, 46.

Для упрощенія выкладокъ очень важно умѣть находить съ точностію и по возможности скоро, дѣлителей чиселъ. При малыхъ числахъ, состоящихъ изъ двухъ и трехъ цифръ, нахожденіе дѣлителей не представляетъ затрудненій; трудности увеличиваются по мѣрѣ

увеличенія самыхъ чиселъ. Однакожь есть признаки, по которымъ тотчасъ можно узнать, дѣлится ли данное число безъ остатка на другое, или нѣтъ, и твердое знаніе этихъ признаковъ, о которыхъ теперь будемъ говорить, облегчаетъ работы при выкладкахъ. Но прежде всего надобно обратить вниманіе на слѣдующія общія замѣчанія о дѣлимости чиселъ, сами по себѣ ясныя послѣ рѣшенія множества примѣровъ, изложенныхъ въ первой книгѣ ариѳметики.

I. *Если данное сложное число представляетъ собою произведеніе изъ двухъ, трехъ и больше множителей, то каждый изъ этихъ множителей дѣлитъ нацѣло это данное число.*

Примѣры:

$132 = 11 \times 12$, слѣдовательно и 11 и 12 суть дѣлители числа 132; ибо 132 произошло отъ увеличенія числа 11 въ 12 разъ, или числа 12 въ 11 разъ. Но 132 равно также 44×3, поэтому и 44 и 3 суть его дѣлители. Тоже можно сказать и о числахъ 6 и 22; потому что $6 \times 22 = 132$ и т. д.

$504 = 7 \times 9 \times 8$; поэтому и 7 и 9 и 8 суть его дѣлители. Равнымъ образомъ $504 = 14 \times 3 \times 12$; слѣдовательно и эти числа также его дѣлители и проч.

II. *Всякое данное сложное число не только раздѣляется на своихъ множителей безъ остатка, но раздѣляется и на каждое изъ произведеній, составленныхъ изъ этихъ множителей.*

Если число 140 дѣлится нацѣло и на 7, и на 5, то оно должно также раздѣлиться нацѣло и на произведеніе 7×5, т. е. на 35.

$140 = 20 . 7 = 4 . 5 . 7 = 4 . 35$; $140 : 35 = 4$.

III. *Если обѣ части, равныя или неравныя, на которыя разложено данное число, дѣлятся безъ остатка на какое-либо число, то все данное число должно также раздѣлиться на него безъ остатка.*

Возьмемъ число 24 и разложимъ его на двѣ неравныя части, напр. 18 и 6. Намъ извѣстно, что и 18 и 6 дѣлятся нацѣло на 3: говоримъ, что и 24 также раздѣлится нацѣло на 3. Ибо $18 = 6 \times 3$; $6 = 2 \times 3$; слѣдовательно $18 + 6$ или $24 = 6 \times 3 + 2 \times 3 = 8 \times 3$.

Еще примѣръ:

245 можно разложить на 140 и 105. Не трудно убѣдиться, что и 140 и 105 дѣлятся безъ остатка на 7; слѣдовательно и все число должно имѣть дѣлителемъ 7.

$$140 = 20 . 7; \; 105 = 15 . 7;$$
$$20 . 7 + 15 . 7 = 245 = 35 . 7.$$

Теперь перейдемъ къ обозначенію главнѣйшихъ признаковъ дѣлимости чиселъ, о которыхъ предъ этимъ упомянули.

§ 2.

ПРИЗНАКИ ДѢЛИМОСТИ ЧИСЕЛЪ.

1) *Всякое число дѣлится на 2 безъ остатка, когда на мѣстѣ единицъ его находится четная цифра или нуль.*

По такому условію, данное число должно состоять изъ нѣсколькихъ десятковъ и четнаго числа единицъ, или только изъ однихъ десятковъ. Число 2 содержится въ 1 десяткѣ ровно 5 разъ, поэтому оно будетъ содержаться безъ остатка и во всякомъ числѣ десятковъ, какъ бы послѣднее велико ни было. Въ четномъ числѣ единицъ 2 всегда содержится безъ остатка, значитъ и во всемъ числѣ оно содержится также безъ остатка.

Наприм. число 264 дѣлится нацѣло на 2, потому что оно состоитъ изъ 26 десятковъ и 4 единицъ; 4 дѣлится безъ остатка на 2, слѣдовательно и число 264.

Но, напримѣръ, число 327 не дѣлится нацѣло на 2, ибо хотя его десятки (32) и дѣлятся на 2, однакожъ единицы (7) не раздѣляются безъ остатка на это число.

2) *Всякое число дѣлится безъ остатка на 3, когда сумма всѣхъ цифръ, его изображающихъ, дѣлится на 3.* Такъ, напримѣръ, число 3624 дѣлится безъ остатка на 3, когда сумма его цифръ $(3 + 6 + 2 + 4 = 18)$ дѣлится на 3.

Мы знаемъ уже изъ первой книги (см. § 35), что всякое число десятковъ, сотенъ, тысячъ и проч. можетъ быть разложено на 3 такъ, что въ остаткѣ получится та же цифра, которою означено самое число десятковъ, сотенъ, тысячъ и проч.

Разложимъ на тройки число 3624. Мы знаемъ, что это число $= 3000 + 600 + 20 + 4$.

$$\begin{aligned} \text{Но } 3000 &= 999 \times 3 + 3 \\ 600 &= 198 \times 3 \times 6 \\ 20 &= 6 \times 3 + 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что число $3624 = (999 \times 3 + 198 \times 3 + 6 \times 3) + (3 + 6 + 2 + 4) = (999 \times 3 + 198 \times 3 + 6 \times 3 + 15) = 1203 \times 3 + 15$.

Здѣсь число 3624 разложено на двѣ части, изъ которыхъ каждая раздѣляется нацѣло на 3; поэтому и все число 3624 также дѣлится безъ остатка на три.

Примѣръ. Какъ доказать, не производя самаго дѣленія, что число 1392 дѣлится на 3 безъ остатка?

3) *Всякое число, болѣе 100, дѣлится на 4 безъ остатка, если первые два знака его съ правой стороны, т. е. десятки и единицы, дѣлятся на 4.* Ибо всякое число можно разложить на двѣ части, изъ которыхъ въ одной были бы только десятки и единицы, а въ другой сотни, тысячи и проч. Но каждая сотня дѣлится на 4 безъ остатка, значитъ и каждое число сотенъ, тысячъ и пр. дѣлится нацѣло на 4. Отсюда заключаемъ, чтобъ все число могло раздѣлиться на 4, надобно только, чтобъ его десятки и единицы дѣлились на 4.

Примѣръ. Число 13268 дѣлится на 4, потому что десятки и единицы его, т. е. 68 дѣлятся на 4 безъ остатка. Число 13268 можно разложить такъ:

$$13268 = 132 \text{ сот.} + 68.$$

Каждая сотня дѣлится на 4, значитъ и 132 сотни раздѣлятся на 4; кромѣ того число 68 дѣлится на 4; поэтому и все число дѣлится на 4.

4) *Если число составлено только изъ пятковъ, т. е. имѣетъ на концѣ цифру 0 или 5, то оно всегда раздѣлится на 5 безъ остатка,* — что очевидно безъ всякаго объясненія.

Напримѣръ:

$$1580 = 316 \times 5,$$
$$2405 = 481 \times 5 \text{ и проч.}$$

5) *То число раздѣляется на 6 безъ остатка, которое дѣлится и на 2, и на 3, потому что 6 = 2 × 3.* Но число дѣлится нацѣло на 3, когда сумма цифръ его дѣлится на 3, а на 2, когда послѣдняя цифра его четная или нуль; поэтому, если оба эти условія имѣютъ мѣсто, то число раздѣлится безъ остатка и на 6.

Таковы числа 648, 906 и проч.

6) *Всякое число, болѣе тысячи, дѣлится безъ остатка на 8, когда сумма сотенъ, десятковъ и единицъ его, т. е. три послѣднія цифры, дѣлятся безъ остатка на 8;* потому что въ такомъ случаѣ данное число можно разложить на одну или нѣсколько тысячъ и еще на сотни, десятки в единицы. Число 8 содержится въ 1000 ровно 125 разъ, поэтому оно должно заключаться и въ каждомъ числѣ

тысячъ, сколько бы ихъ ни было, также безъ остатка; въ сотняхъ же, десяткахъ и единицахъ оно по условію содержится безъ остатка.

Число 32376 раздѣлится на 8 безъ остатка; ибо оно состоитъ изъ 32 тысячъ и 376 единицъ, а 376 раздѣляется безъ остатка на 8.

7) *Всякое число дѣлится нацѣло на 9, если сумма всѣхъ цифръ, его изображающихъ, дѣлится на 9 безъ остатка.*

Изъ § 35 первой книги извѣстно, что всякое число десятковъ, сотенъ, тысячъ и проч. можетъ быть разложено на девятки такъ, что въ остаткѣ получится та же цифра, которая обозначаетъ и разлагаемое число. Итакъ, если сумма цифръ разлагаемаго числа раздѣляется на 9 безъ остатка, то и все число дѣлится также на 9.

Испытаемъ: дѣлится ли число 2178 нацѣло на 9? — Для этого найдемъ сумму его цифръ.

$$2 + 1 + 7 + 8 = 18;\ 18 : 9 = 2$$

Теперь докажемъ, что этотъ признакъ вѣренъ, для узнанія дѣлимости чиселъ на 9.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{aligned} 2178 &= 2000 + 100 + 70 + 8 \\ 2000 &= 222 \times 9 + 2 \\ 100 &= 11 \times 9 + 1 \\ 70 &= 7 \times 9 + 7 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

$$2178 = (222 \times 9 + 11 \times 9 + 7 \times 9) + 2 + 1 + 7 + 8.$$

Если обѣ части разложеннаго такимъ образомъ числа дѣлятся нацѣло на 9, то и все число раздѣлится на 9. Но сумма произведеній на 9, т. е. $222 \times 9 + 11 \times 9 + 7 \times 9$, или всего 240 разъ 9 раздѣляется на 9; сумма остатковъ: $2 + 1 + 7 + 8$, или 18 тоже раздѣляется нацѣло на 9; слѣдовательно и все число дѣлится на 9.

8) Безъ всякаго объясненія понятно, что на 10 дѣлятся безъ остатка всѣ числа, въ которыхъ на мѣстѣ единицъ стоитъ нуль; на 100 — тѣ числа, которыя имѣютъ на концѣ два нуля, и т. д. (1).

(1) Въ нѣкоторыхъ ариѳметическихъ руководствахъ, напримѣръ въ «Ариѳметикѣ» академика В. Я. Буняковскаго, допущенной Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія къ употребленію въ гимназіяхъ, трактуется, единственно ради поддержанія искуственной системы во всей ея полнотѣ, безъ пропусковъ, о дѣлимости чиселъ на 7, 11 и 13; но какъ трактуется? это видно изъ примѣчанія, помѣщеннаго на 71-й страницѣ того же руководства. Вотъ что говорится въ этомъ примѣчаніи:

Повидимому, небольшая еще польза знать признаки дѣлимости на первыя десять чиселъ; но какъ эти числа входятъ множителями во многія составныя числа, то польза эта на самомъ дѣлѣ дѣлается значительною. Мы знаемъ уже, что 6, равное 2 × 3, тогда только дѣлитъ нацѣло какое-либо число, когда это число дѣлится безъ остатка и на 2, и на 3; то же самое можно замѣтить и о множествѣ другихъ составныхъ чиселъ. Такъ, прямо можемъ сказать, что число 351 не дѣлится на 18; ибо (такъ какъ 18 = 2 × 9) чтобы число 351 могло имѣть дѣлителемъ своимъ 18, оно должно прежде имѣть своими дѣлителями и 9 и 2; оно раздѣляется на 9, однакожъ не раздѣляется нацѣло на 2: значитъ не можетъ дѣлиться безъ остатка и на 18. Подобное разсужденіе прилагается и ко многимъ другимъ случаямъ. Итакъ, твердое удержаніе въ памяти изложенныхъ здѣсь главнѣйшихъ признаковъ дѣлимости чиселъ много способствуетъ, какъ увидимъ впослѣдствіи, сокращенію выкладокъ; потому что съ помощію ихъ, не производя на самомъ дѣлѣ дѣленія, мы во многихъ случаяхъ можемъ узнать тотчасъ, раздѣляется ли такое-то или такое-то число на такія-то числа безъ остатка, или нѣтъ.

§ 3.

НАХОЖДЕНІЕ ВСѢХЪ ДѢЛИТЕЛЕЙ КАКОГО-ЛИБО СЛОЖНАГО ЧИСЛА И ОПРЕДѢЛЕНІЕ НАИБОЛЬШАГО ОБЩАГО ДѢЛИТЕЛЯ ДВУХЪ ИЛИ БОЛѢЕ ЧИСЕЛЪ.

Прежде всего замѣтимъ, что дѣлителей чиселъ можно вообще раздѣлить на первоначальныхъ и составныхъ, которые образуются чрезъ взаимное перемноженіе первоначальныхъ. Такъ число 2 есть

«Чтобы не затруднять начинающихъ, мы предлагаемъ безъ доказательствъ какъ этотъ признакъ (*для числа 7*), такъ и другой, *для числа* 11. Доказательства этихъ пріемовъ помѣщены въ моемъ (г-на Буняковскаго) Математическомъ Лексиконѣ, въ статьяхъ «Divisibilitè и Congruence.» Спрашивается, какая была надобность включать въ учебное руководство такія темныя мѣста? Для непосредственнаго уразумѣнія учащихся они недоступны, такъ что имъ остается только ихъ зазубрить, чтобы пощеголять на экзаменѣ, а потомъ тотчасъ позабыть. Или въ самомъ дѣлѣ думають, что такіе кунстюки изощряють способности? — Что же касается до практической пользы, то, конечно, каждый согласится съ нами, что въ тѣхъ весьма рѣдкихъ случаяхъ, когда встрѣтится надобность узнать — дѣлится ли какое-либо многосложное число нацѣло на 7, или на 11 или на 13 и пр., проще и сподручнѣе всего обращаться къ непосредственному дѣленію, нежели къ такой головоломкѣ.

первоначальный дѣлитель числа 96, а 4 — составной, потому что $4 = 2 \times 2$; 3 есть также первоначальный дѣлитель 96, а 12 — составной, ибо $12 = 4 \times 3$ и т. д. Отсюда видно, что первоначальные дѣлители суть первыя числа, т. е., какъ мы знаемъ уже, такіе, которые не могутъ быть разложены на сомножителей.

Пусть требуется отыскать всѣхъ дѣлителей числа 360. Надобно сначала для этого пробовать дѣлить нацѣло данное число на каждое первое число по порядку, т. е. сперва на 2, потомъ на 3, далѣе на 5, 7, 11, 13 и т. д. (Вы можете здѣсь удостовѣриться, сколь важно помнить всѣ первыя числа, по-крайней-мѣрѣ отъ двухъ до 97, какъ чаще встрѣчающіяся при выкладкахъ). $360 : 2 = 180$; итакъ 2 есть дѣлитель. Посмотримъ, не раздѣлится ли еще число 180 на 2; $180 : 2 = 90$; слѣдовательно 2 еще разъ будетъ дѣлителемъ, и $360 = 90 . 2 . 2$.

Раздѣливъ 90 на 2, узнаемъ, что 2 можетъ быть еще разъ дѣлителемъ числа 360.

$$360 = 45 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Такъ какъ 45 нельзя раздѣлить нацѣло на 2, то переходимъ къ слѣдующему первому числу 3.

$45 : 3 = 15$. Поэтому, 3 есть также дѣлитель 360, и число 360 теперь равно: $15 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Но 15 тоже раздѣляется на 3 безъ остатка, и такимъ образомъ узнаемъ, что данное число разлагается на слѣдующихъ множителей, или первоначальныхъ дѣлителей: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Если всѣхъ этихъ множителей перемножить между собою, то получится число 360.

Всѣ произведенныя нами послѣдовательныя дѣленія можно представить въ такой сокращенной формѣ:

дѣлимое	дѣлители
360	2
(первое частное) 180	2
(второе частное) 90	2
(третье частное) 45	3
(четвертое частное) 15	3
(пятое частное) 5	5

Но изъ § 1 намъ извѣстно, что всякое данное сложное число не только дѣлится на каждаго изъ своихъ дѣлителей, но раздѣляется безъ остатка и на каждое изъ произведеній, составленныхъ изъ этихъ

дѣлителей. Поэтому, какъ бы ни перемножать между собою первоначальныхъ дѣлителей (или множителей) числа 360, всегда получится въ произведеніи число, которое будетъ дѣлить нацѣло данное число 360, что видно изъ слѣдующаго:

$2 \times 2 = 4,$
$2 \times 2 \times 2 = 8,$
$3 \times 3 = 9,$
$2 \times 3 = 6,$
$2 \times 2 \times 3 = 12,$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24,$
$2 \times 9 = 18,$
$2 \times 2 \times 9 = 36,$
$2 \times 2 \times 2 \times 9 = 72,$
$2 \times 5 = 10,$
$2 \times 2 \times 5 = 20,$
$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40,$
$3 \times 5 = 15,$
$3 \times 3 \times 5 = 45,$
$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90,$
$2 \times 3 \times 5 = 30,$
$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60,$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120,$
$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180,$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360.$

Итакъ, по порядку получается слѣдующій рядъ дѣлителей (первоначальныхъ и сложныхъ):

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Опредѣлить всѣхъ дѣлителей числа 675.

		дѣлители.
дѣлимое	675	3
(первое частное)	225	3
(второе частное)	75	3
(третье частное)	25	5
(четвертое частное)	5	5

$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

Сложные дѣлители:

$3 \times 3 = 9$,
$3 \times 3 \times 3 = 27$,
$3 \times 5 = 15$,
$3 \times 3 \times 5 = 45$,
$3 \times 3 \times 3 \times 5 = 135$,
$5 \times 5 = 25$,
$3 \times 5 \times 5 = 75$,
$5 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$,

Итакъ, всѣ дѣлители суть: 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225.

Такимъ образомъ для полученія всѣхъ дѣлителей какого-либо числа, надобно, во-первыхъ, узнать всѣхъ первоначальныхъ его дѣлителей, которые опредѣлятся чрезъ послѣдовательное дѣленіе нацѣло даннаго числа на первыя числа; во-вторыхъ, опредѣлить сложныхъ дѣлителей чрезъ всѣ возможныя перемноженія между собою первоначальныхъ дѣлителей.

Послѣ этого вопросъ о нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или болѣе данныхъ чиселъ рѣшается самъ собою: стоитъ только, по показанному способу, опредѣлить всѣхъ дѣлителей данныхъ чиселъ и потомъ обозначить изъ нихъ того, который изъ общихъ дѣлителей самый большій.

Такъ чиселъ 360 и 675 общій наибольшій дѣлитель 45.

Задача. *Отыскать общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 1540 и 13650.*

1540	2	13650	2
770	2	6825	3
385	5	2275	5
77	7	455	5
11	11	91	7
		13	13

$1540 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$.
$13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$.

Не производя даже перемноженія, тотчасъ видно, что общіе множители обоихъ чиселъ 2, 5, 7; итакъ, общій наибольшій дѣлитель данныхъ чиселъ есть произведеніе изъ общихъ множителей, т. е. $2 \times 5 \times 7$ или 70.

Раздѣливъ числа 1540 и 13650 на 70, каждое порознь, получимъ первыя между собою числа, а именно: 22 и 195.

Очевидно, что для нахожденія предложеннымъ способомъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ важнѣе всего опредѣлить, посредствомъ послѣдовательныхъ дѣленій, первоначальныхъ дѣлителей. Но здѣсь встрѣчаются иногда затрудненія, которыхъ, впрочемъ, не трудно избѣжать. Можетъ случиться, что данное число только по величинѣ своей кажется составнымъ, между тѣмъ какъ на самомъ дѣлѣ оно первое. Какъ въ томъ удостовѣриться? Если число слишкомъ велико, то не прійдется ли дѣлать много пробныхъ дѣленій, чтобы убѣдиться, наконецъ, что оно принадлежитъ къ первымъ числамъ? — Но чтобы не производить этихъ лишнихъ пробныхъ дѣленій, намъ надобно хорошо помнить признаки дѣлимости чиселъ, о которыхъ сообщено въ § 2. Если дойдемъ до такого пробнаго дѣлителя, который, будучи помноженъ самъ на себя, дастъ произведеніе, превышающее данное число, то это знакъ, что далѣе продолжать дѣленія не слѣдуетъ, и что въ такомъ случаѣ данное число первое.

Напримѣръ. *Найти всѣхъ дѣлителей числа 347.*

Во-первыхъ, тотчасъ видимъ что число 347 не можетъ быть раздѣлено нацѣло на 2, потому что послѣдняя цифра его нечетная (7); оно не можетъ быть раздѣлено и на 3; отсюда заключаемъ, что оно не можетъ быть раздѣлено и на 6, потому что $6 = 2 \times 3$. Если это число не раздѣляется на 2 и на 3 безъ остатка, то оно и подавно не можетъ быть раздѣлено нацѣло и на 4, и на 8, и на 9. На 5 оно также не можетъ раздѣлиться безъ остатка, ибо его нельзя разложить на пятки; равнымъ образомъ оно не дѣлится и на 10. Не трудно также убѣдиться, что оно не можетъ имѣть дѣлителями числа 12, 14, 15, 16, 18 и т. д.; потому что $12 = 3 \times 4$, $15 = 3 \times 5$, $14 = 2 \times 7$, $16 = 2 \times 8$, $18 = 2 \times 9$ и т. д.; т. е. въ каждое изъ этихъ составныхъ чиселъ входятъ такіе множители, которые не дѣлители даннаго числа; ибо, напримѣръ, чтобы число могло раздѣлиться безъ остатка на 12, оно должно дѣлиться нацѣло и на 3, и на 4; то же можно сказать и о прочихъ числахъ (см. § 2).

Итакъ, не производя дѣленія на самомъ дѣлѣ, мы удостовѣряемся уже, что изъ всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 20 (и болѣе), данное число не можетъ имѣть своими дѣлителями слѣдующихъ чиселъ: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 и т. д. Остается только произвести пробныя дѣленія надъ числами 7, 11, 13, 19 и т. д. Раздѣливъ послѣдовательно число 347 на 7, 11, 13,

19, увидимъ, что оно нацѣло не дѣлится ни на одно изъ этихъ чиселъ.

Но на числѣ 19 можно остановиться и заключить, что 347 есть первое число, такъ какъ, умноживъ 19 само на себя, получаемъ 361, т. е. число бо̀льшее 347. Ибо, если предположить число 19 множителемъ произведенія 347, то другой множитель его долженъ быть менѣе 19; но всѣ числа, которыя менѣе 19, не оказались множителями числа 347: значитъ, что оно и не составляется изъ множителей, т. е. число первое.

Такія изслѣдованія надъ числами надобно производить прежде, нежели приступать къ нахожденію ихъ общихъ дѣлителей.

Найти общаго наибольшаго дѣлителя слѣдующихъ трехъ чиселъ: 105, 7260 и 180.

105	3	7260	2	180	2
35	5	3630	2	90	2
7	7	1815	3	45	3
		605	5	15	3
		121	11	5	5
		11	11		

$105 = 3 \times 5 \times 7,$
$7260 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11,$
$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$

Такъ какъ только числа 3 и 5 входятъ множителями во всѣ три произведенія, то 3×5 или 15 есть общій наибольшій дѣлитель всѣхъ трехъ данныхъ чиселъ.

§ 4.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 370 и 445.

2) Опредѣлить всѣхъ общихъ дѣлителей чиселъ 9816 и 11840 и найти наибольшаго между ними.

3) Найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 7248 и 9872.

4) На какое число надобно раздѣлить числа 7920 и 13200, каждое порознь, чтобы частныя ихъ вышли первыми между собою?

5) Отыскать общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 5781 и 16251.

6) Опредѣлить всѣхъ общихъ дѣлителей чиселъ 23716 и 24200.

7) Найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 5712 и 6384.

8) На какое число надобно раздѣлить числа 18054 и 27081, чтобы частныя ихъ были первыми между собою?

9) Опредѣлить общихъ дѣлителей чиселъ 1123 и 9247.

§ 5.

ОБЪ ИЗМѢНЯЕМОСТИ ЧАСТНАГО, ПРОИСХОДЯЩЕЙ ОТЪ РАЗЛИЧНЫХЪ ИЗМѢНЕНІЙ ДѢЛИМАГО И ДѢЛИТЕЛЯ.

а) Если $100 : 4 = 25$,
то $200 : 4 = 50$ или 2×25,
$300 : 4 = 75$ или 3×25,
$400 : 4 = 100$ или 4×25 и т. д.

Чрезъ увеличеніе дѣлимаго вдвое, втрое, вчетверо и т. д., частное увеличивается также вдвое, втрое, вчетверо и т. д., и вообще во сколько разъ увеличивается дѣлимое, при одномъ и томъ же дѣлителѣ, во столько же разъ увеличивается и частное.

Обратно:

Если $800 : 4 = 200$,
то $400 : 4 = 100 = {}^1/_2 \, . \, 200$,
$200 : 4 = 50 = {}^1/_4 \, . \, 200$,
$100 : 4 = 25 = {}^1/_8 \, . \, 200$;

т. е. во сколько разъ уменьшается дѣлимое, при томъ же дѣлителѣ, во столько же разъ уменьшается и частное.

б) Если $800 : 2 = 400$,
то $800 : 4 = 200$ или ${}^1/_2 \, . \, 400$,
$800 : 8 = 100$ или ${}^1/_4 \, . \, 400$,
$800 : 16 = 50$ или ${}^1/_8 \, . \, 400$ и т. д.;

т. е. во сколько разъ увеличивается дѣлитель, при томъ же дѣлимомъ, во столько же разъ уменьшается частное.

Обратно:

Если $400 : 40 = 10$,
то $400 : 20 = 20$ или 2×10,
$400 : 10 = 40$ или 4×10,
$400 : 5 = 80$ или 8×10 и т. д.;

вообще во сколько разъ уменьшается дѣлитель, при томъ же дѣлимомъ, во столько же разъ увеличивается частное.

Итакъ, частное увеличивается отъ увеличенія дѣлимаго и уменьшенія дѣлителя.

Посмотримъ теперь, что произойдетъ съ частнымъ, если дѣлимое и дѣлитель увеличатся или уменьшатся въ одинаковое число разъ.

а) $126 : 6 = 21$

$126 \times 3 : 6 \times 3 = 378 : 18 = 21$

$\frac{126 : 3}{6 : 3} = {}^{42}/_{2} = 21.$

б) $24 : 8 = 3$

$24 \times 5 : 8 \times 5 = 120 : 40 = 3$

$24 \times 7 : 8 \times 7 = 168 : 56 = 3$

${}^{24}/_{4} : {}^{8}/_{4} = 6 : 2 = 3$ и т. д.

Очевидно, что если дѣлимое и дѣлителя въ одинаковое число разъ увеличить или уменьшить, то частное не перемѣнится.

Это свойство частнаго не измѣняться, когда дѣлимое и дѣлитель увеличиваются или уменьшаются въ одинаковое число разъ, даетъ намъ возможность видоизмѣнять отношеніе между дѣлимымъ и дѣлителемъ различнымъ образомъ.

Въ самомъ дѣлѣ,

672 : 336 все равно, что 336 : 168, или 168 : 84, или 84 : 42, или 42 : 21, или 14 : 7, или 2 : 1; ибо частное, показывающее отношеніе дѣлимаго къ дѣлителю, во всѣхъ этихъ примѣрахъ одинаково, т. е. число 2.

Обратно:

24 : 8 все равно, что 48 : 16, или 72 : 24, или 96 : 32, или 120 : 40, или 144 : 48, или 168 : 56, и т. д.

Но отношеніе между дѣлимымъ и дѣлителемъ тотчасъ измѣнится, когда только одно изъ этихъ чиселъ увеличимъ или уменьшимъ въ нѣсколько разъ, — что очевидно изъ предыдущаго.

Мы знаемъ уже, что если дѣлитель въ дѣлимомъ содержится нѣсколько разъ безъ остатка, то дѣлимое всегда равно частному, умноженному на дѣлителя. Въ такомъ случаѣ можно сказать, что дѣлимое есть произведеніе изъ двухъ множителей, дѣлителя и частнаго. Отсюда снова убѣждаемся въ томъ же свойствѣ, которое было разсмотрѣно нами уже прежде (см. § 35 первой книги); т. е. если одинъ изъ множителей даннаго произведенія увеличится въ нѣсколько разъ, то, для неизмѣняемости произведенія, необходимо чтобъ другой множитель во столько же разъ уменьшился.

Такъ

$$192 = 12 \times 16.$$

Если 12 увеличимъ въ 4 раза, то 16 должно уменьшить въ 4 раза, чтобы произведеніе не измѣнилось. Въ самомъ дѣлѣ, 48×4 составляетъ также 192 и т. д.

Изложенныя здѣсь свойства весьма важны для сокращенія выкладокъ; ибо искусство производить выкладки скоро и сокращенно состоитъ именно, какъ мы уже замѣтили, въ искусствѣ видоизмѣнять числа всякимъ возможнымъ образомъ.

§ 6.

НАХОЖДЕНІЕ ОБЩАГО НАИБОЛЬШАГО ДѢЛИТЕЛЯ ПОСРЕДСТВОМЪ ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНАГО ДѢЛЕНІЯ

То, что изложено о дѣлителяхъ въ §§ 1, 2 и 3-мъ, достаточно для большей части случаевъ, встрѣчающихся въ практическихъ примѣненіяхъ. Обыкновенно бываетъ надобность въ отысканіи дѣлителей чиселъ и въ опредѣленіи наибольшаго изъ нихъ при сокращеніи дробей; но если въ выводахъ, достигаемыхъ отъ дѣйствій надъ дробными величинами, получаются подконецъ дроби, выраженныя въ большихъ числахъ, а потому и требующія сокращенія, то это чаще всего происходитъ оттого, что своевременно, по мѣрѣ совершенія самаго дѣйствія, не было обращено надлежащаго вниманія вообще на взаимныя сокращенія чиселъ. Но такъ какъ иногда дѣйствительно встрѣчаются числа, выраженныя въ весьма большихъ числахъ, и какъ способъ, предложенный въ § 1, для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, хотя простъ, но продолжителенъ, то и изложимъ теперь другой способъ того же дѣйствія, состоящій въ послѣдовательномъ дѣленіи, а въ концѣ этого параграфа помѣстимъ таблицу первыхъ чиселъ отъ 1 до 1499.

Вопросъ. Требуется отыскать наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ 360 и 276.

Рѣшеніе. Наибольшій общій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ не можетъ быть болѣе меньшаго числа (276), потому что иначе это число не могло бы раздѣлиться на него нацѣло. Но меньшее число тогда только будетъ наибольшимъ общимъ дѣлителемъ, когда оно

въ большемъ числѣ содержится безъ остатка. Итакъ прежде всего надо раздѣлить 360 на 276.

$$\frac{360 : 276 = 1}{84}$$

Раздѣливъ 360 на 276, получаемъ въ частномъ 1 и въ остаткѣ 84. Это показываетъ, что наибольшій общій дѣлитель долженъ быть менѣе меньшаго изъ данныхъ чиселъ.

$$360 = 276 \times 1 + 84;$$

т. е. дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ.

Но изъ § 1 извѣстно, что если обѣ части какого-либо разложеннаго числа дѣлятся на другое какое-либо число безъ остатка, то и все разложенное число дѣлится на это другое тоже безъ остатка; слѣдовательно, самый большой общій дѣлитель чиселъ $276 \times 1 + 84$, или 276 и 84, будетъ также общимъ дѣлителемъ и числа 360. Такимъ образомъ попробуемъ раздѣлить 276 на 84, т. е. *дѣлителя на первый остатокъ*, и если дѣленіе произойдетъ нацѣло, то 84 и будетъ искомымъ наибольшимъ дѣлителемъ двухъ данныхъ чиселъ.

$$\frac{276 : 84 = 3}{24}$$

Остатокъ, происшедшій отъ этого втораго дѣленія, показываетъ, что общій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ долженъ быть менѣе 84.

Но $276 = 84 \times 3 + 24$, а $360 = 276 \times 1 + 84$ или $84 \times 4 + 24$.

Отсюда ясно, что общій наибольшій дѣлитель данныхъ чиселъ долженъ быть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ и чиселъ 84 и 24.

Раздѣлимъ теперь 84 на 24, т. е. *первый остатокъ на второй остатокъ*.

$$\frac{84 : 24 = 3}{12}$$

Очевидно, что и число 24 не можетъ быть наибольшимъ общимъ дѣлителемъ.

Но такъ какъ $84 = 24 \times 3 + 12$, то данныя числа можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$276 = 84 \times 3 + 24 = (24 \times 3 + 12)\,3 + 24 =$$
$$24 \times 9 + 12 \times 3 + 24 = 24 \times 10 + 12 \times 3;$$
$$360 = 84 \times 4 + 24 = (24 \times 3 + 12)\,4 + 24 =$$
$$24 \times 12 + 12 \times 4 + 24 = 24 \times 13 + 12 \times 4;$$

т. е. число 276 состоитъ изъ десятикратнаго числа 24 и трикратнаго числа 12; а 360 — изъ тринадцатикратнаго числа 24 и четырекратнаго числа 12.

Такъ какъ въ оба данныя числа входятъ одни и тѣ же множители, 24 и 12, то ихъ наибольшій общій дѣлитель долженъ быть наибольшимъ общимъ дѣлителемъ и этихъ множителей; поэтому надо 24 раздѣлить на 12, т. е. *второй остатокъ на третій остатокъ.*

$$\begin{array}{l} 24 : 12 = 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Но изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

1) Самый большой общій дѣлитель 276 и 360 долженъ быть и самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 276 и 84.

2) Самый большой общій дѣлитель 276 и 84 долженъ быть также самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 84 и 24.

3) Самый большой общій дѣлитель 84 и 24 долженъ быть и самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 24 и 12.

Но самый большой общій дѣлитель 24 и 12 есть число 12; слѣдовательно это же число должно быть и наибольшимъ общимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ 360 и 276.

Впрочемъ это само собою дѣлается очевиднымъ чрезъ слѣдующее разложеніе данныхъ чиселъ на сомножителей.

$$360 = 30 \times 12$$
$$276 = 23 \times 12$$

Это разложеніе прямо показываетъ, что общимъ дѣлителемъ не можетъ быть число, которое было бы болѣе 12; потому что прочіе множители, 30 и 23, первыя между собою числа.

Послѣдовательное дѣленіе, на основаніи котораго получаютъ наибольшаго общаго дѣлителя, располагается обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

267	360	1			
	276				
(1-й остатокъ)	84	276	3		
		252			
2-й остатокъ)		24	84	3	
			72		
(3-й остатокъ)			12	24	2
				24	
				0	

Общее правило. *Чтобы найти наибольшаго общаго дѣлителя какихъ-либо двухъ данныхъ чиселъ, надобно большее изъ нихъ раздѣлить на меньшее, и если въ дѣленіи не получится остатка, то меньшее число и будетъ искомымъ дѣлителемъ. Если же произойдетъ отъ дѣленія остатокъ, то дѣлится меньшее число на этотъ первый остатокъ. Полученный остатокъ въ томъ только случаѣ будетъ самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ, когда онъ содержится равное число разъ въ меньшемъ числѣ; въ противномъ случаѣ должно продолжать дѣленіе перваго остатка на второй, втораго на третій и такъ далѣе, пока дѣлимое раздѣлится наконецъ нацѣло: тогда послѣдній дѣлитель и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ.*

Примѣнивъ дѣйствіе отысканія наибольшаго дѣлителя къ двумъ членамъ сокращаемой дроби и получивъ такимъ образомъ самое большое число, на которое оба эти члена раздѣляются безъ остатка, если потомъ дѣйствительно раздѣлимъ ихъ на это найденное число, то и получимъ дробь въ простѣйшемъ видѣ; т. е. обратимъ ея члены въ первыя между собою числа.

Примѣръ 1-й. Привести къ простѣйшему виду дробь $\frac{592}{999}$.

Рѣшеніе.

```
592 | 999 | 1
    | 592 |
    -------
      407 | 592 | 1
          | 407 |
          -------
            185 | 407 | 2
                | 370 |
                -------
                   37 | 185 | 5
                      | 185 |
                      -------
                          0
```

Итакъ наибольшій общій дѣлитель обоихъ членовъ предложенной дроби есть 37. Раздѣливъ на него эти члены, получимъ:

```
592 : 37 = 16
37
---
222
222
---
  0

999 : 37 = 27
74
---
259
259
---
  0
```

$$\frac{592}{999} \xrightarrow{\;37\;} \frac{16}{27}$$

Примѣръ 2-й. Отношеніе 108 : 480 привести въ простѣйшій видъ.

```
108 | 480   4
    | 432
    ------
      48 | 108 | 2
         |  96 |
         ------
          12 | 48 | 4
             | 48 |
             -----
               0
```

108 : 12 = 9 }
480 : 12 = 40 } Отношеніе 108 : 480 все равно, что отношеніе 9 : 40.

Примѣръ 3-й. Привести дробное выраженіе $\frac{3072}{912}$ къ простѣйшему виду.

```
912 | 3072 | 3
    | 2736 |
    -------
      336 | 912 | 2
          | 672 |
          ------
           240 | 336 | 1
               | 240 |
               ------
                 96 | 240 | 2
                    | 192 |
                    ------
                     48 |  96 | 2
                        |  96 |
                        ------
                           0
```

```
3072 : 48 = 64 }
 288           }
  192          }        48
  192          }     3072 | 64
    0          }     ----------
                      912 | 19
912 : 48 = 19  }
 48            }
 432           }
 432           }
   0           }
```

Если въ послѣдовательномъ дѣленіи послѣдній остатокъ будетъ 1, то это покажетъ, что оба предложенныя числа первыя между собою. Обратно, если оба данныя числа первыя между собою, то въ послѣдовательномъ дѣленіи необходимо послѣдній остатокъ будетъ 1 Ибо по свойству самаго дѣйствія видно, что остатки все болѣе и болѣе уменьшаются, такъ что послѣдній изъ нихъ долженъ быть или 0 или 1; но когда выходитъ 0, тогда предпослѣдній остатокъ

въ предшествующемъ ему остаткѣ содержится равное число разъ, и въ такомъ случаѣ данныя числа имѣютъ общаго дѣлителя; поэтому послѣдній остатокъ 1 соотвѣтствуетъ тому случаю, когда данныя числа первыя между собою.

Возьмемъ, для примѣра, дробь $\frac{317}{873}$.

```
317 | 873 | 2
    | 634 |
     ---------
      239 | 317 | 1
          | 239 |
           ---------
            78 | 239 | 3
               | 234 |
                ---------
                  5 | 78 | 15
                    |  5 |
                     ----
                      28
                      25
                     ----
                       3 | 5 | 1
                         | 3 |
                          ----
                           2 | 3   1
                             | 3
                              ---
                               1
```

Здѣсь послѣдній остатокъ единица, з… ачитъ, что 873 и 317 первыя между собою числа, а самая дробь $\frac{317}{873}$ не можетъ сократиться.

При третьемъ изъ послѣдовательн… ъ дѣленій полученъ остатокъ 5 — число первое само по себѣ; … о какъ 5 не дѣлитъ предыдущаго остатка (78) нацѣло, то имѣе… право полагать, прекращая дѣленіе, что предложенныя числа — … рвыя между собою. Дѣйствительно, изъ общаго хода дѣйствія в… о, что самый большой общій дѣлитель двухъ какихъ-либо данны… чиселъ необходимо раздѣлитъ остатокъ отъ каждаго дѣленія нац… Итакъ, если 5 число первое, то могутъ быть два случая: или … раздѣлитъ нацѣло предыдущій остатокъ, и тогда эта цифра буде… наибольшимъ общимъ дѣлителемъ, или не раздѣлитъ его, и въ … комъ случаѣ для двухъ данныхъ чиселъ не можетъ быть общимъ … лителемъ ни 5, ни другое какое-либо число, кромѣ 1.

Вообще, *если въ послѣдовате… ымъ дѣленіи получается наконецъ остатокъ, который, будучи перв… числомъ, не дѣлитъ нацѣло предыдущаго остатка, то данныя чи… необходимо первыя между собою, и нѣтъ уже надобности продо… ть дѣленія.*

Таблица первыхъ (простыхъ) чиселъ отъ 1 до 1499.

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	877	983	991	997	1009
1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063
1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129
1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217
1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289
1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367
1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447
1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

О ПРОСТЫХЪ ДРОБЯХЪ.

Общее примѣчаніе. Многое изъ того, что изложено въ первыхъ изъ нижеслѣдующихъ параграфовъ, было уже помѣщено въ низшемъ курсѣ Практической Ариѳметики, а потому должно быть хорошо извѣстно учащимся, если только они основательно прошли этотъ низшій курсъ. Но то, что тамъ было изложено чисто практическимъ способомъ и настолько, насколько было нужно для практическихъ цѣлей, здѣсь необходимо должно было быть повторено, при переходѣ отъ практики къ теоріи, отъ частныхъ пріемовъ и правилъ къ общимъ. Имѣя всегда въ виду возрастъ учащихся, въ которомъ вообще они еще такъ неохотно, съ такимъ трудомъ отрываются отъ конкретной, столь свойственной имъ почвы, при переходѣ отъ нея въ область всякаго отвлеченія и обобщенія, мы въ особенности старались о томъ, чтобы такой переходъ сдѣлать для нихъ сколь-возможно нечувствительнѣе. Если это, съ одной стороны, нѣсколько растягиваетъ курсъ, то, съ другой, ускоряетъ пріобрѣтеніе дальнѣйшихъ познаній. Повтореніе пройденнаго всегда хорошо и всегда желательно, но лишь бы оно не было голословнымъ, не производилось въ однѣхъ и тѣхъ же формахъ, а всякій разъ служило бы подкрѣпленіемъ для разъясненія уже сознанной истины, разсматриваемой при иныхъ новыхъ условіяхъ, или на другомъ мѣстѣ въ какомъ-либо иномъ послѣдовательномъ рядѣ мыслей (въ системѣ).

---

§ 7.

О ДРОБЯХЪ ВООБЩЕ И ИЗОБРАЖЕНІИ ИХЪ ЦИФРАМИ.

Изъ предыдущаго извѣстно, что если цѣлое, или единица, раздѣлится на двѣ равныя части, то каждая изъ нихъ назовется *половиною*, на три — *третью*, на четыре — *четвертью*, на пять — *пятою* и т. д. Значитъ, чтобъ изъ равныхъ частей опять можно было составить цѣлое, надо имѣть ихъ столько, насколько это цѣлое было раздѣлено; такъ: половинъ надо имѣть двѣ, третей — три, четвертей — четыре, одиннадцатыхъ — одиннадцать и проч. Слѣдовательно *шесть шестыхъ, двѣ половины, девять девятыхъ* и проч. всѣ эти различныя собранія частей равны *одному цѣлому*, или единицѣ, чтобы впрочемъ подъ этою единицею ни разумѣли: монету ли, какую-либо мѣру вѣса или что другое. Вся разница такихъ собраній состоитъ въ томъ, что въ одномъ случаѣ предметъ дробится на большое число равныхъ между собою частей, а въ другомъ на меньшее.

Каждая изъ такихъ частей цѣлаго, или совокупленіе нѣсколькихъ вмѣстѣ, называется *дробью* или *дробнымъ числомъ*. Поэтому *половина, треть, двѣ трети, три четверти, четыре пятыя, три седьмыя* и проч. все суть дроби, или дробныя числа.

Не только отъ раздѣленія цѣлаго или единицы на 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. равныхъ частей происходятъ дроби, но и отъ раздѣленія всякаго меньшаго числа на большее число; напримѣръ 2, раздѣленныя на 3, даютъ на каждую часть менѣе цѣлаго, а именно $^2/_3$ отъ него; 5, раздѣленныя на 9, даютъ въ частномъ $^5/_9$ и проч. Вообще всякій разъ, когда меньшее число дѣлится на большее, въ частномъ не получается цѣлое, а менѣе его, т. е. дробь. Поэтому-то для изображенія дроби цифрами мы обыкновенно поступали такимъ образомъ: сперва писали меньшее число (дѣлимое), потомъ подъ нимъ проводили черту (знакъ дѣленія), а подъ нею ставили большее число (дѣлителя).

Итакъ всякая дробь выражается двумя числами, раздѣляемыми между собою небольшою чертою. Нижнее число въ каждой дроби, именно стоящее подъ чертою, означаетъ части, на которыя было произведено дѣленіе, и потому это число называется *знаменателемъ*; а верхнее число, показывающее число такихъ частей, именуется *числителемъ*. Оба же числа вмѣстѣ, выражающія собою дробь, называются ея *членами*.

Знаменатель соотвѣтствуетъ всегда вопросу: какія части? (пятыя, седьмыя, двѣнадцатыя и проч.), а числитель: сколько частей? (двѣ, три, пять и проч.). И какъ дробь есть выраженіе частнаго, то числитель выражаетъ собою дѣлимое, а знаменатель — дѣлителя.

Задача. *Наименовать числителей и знаменателей въ слѣдующихъ дробяхъ:* $^{4}/_{7}$, $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{6}$, $^{8}/_{9}$, $^{7}/_{10}$, $^{514}/_{617}$, $^{1024}/_{4028}$.

Отвѣтъ. Числители: 4, 2, 5, 8, 7, 514, 1024; знаменатели: 7, 3, 6, 9, 10, 617. 4028.

§ 8.

ВЗАИМНОЕ СРАВНЕНІЕ ДРОБЕЙ; РАЗНЫЕ РОДЫ ДРОБНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Сравнивая между собою дроби: $^{1}/_{2}$ съ $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{3}$ съ $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{4}$ съ $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{5}$ съ $^{1}/_{7}$, $^{1}/_{12}$ съ $^{1}/_{19}$ и проч., замѣчаемъ, что *чѣмъ на большее число частей дѣлится цѣлое, тѣмъ части становятся менѣе*; такъ $^{1}/_{19}$ менѣе $^{1}/_{12}$, $^{1}/_{7}$ менѣе $^{1}/_{5}$ и т. д. Обратно, *чѣмъ меньше становится знаменатель, тѣмъ части или дроби дѣлаются крупнѣе*; такъ $^{1}/_{2}$ болѣе $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$ болѣе $^{1}/_{5}$ и проч.

Сравнивая между собою дроби

$$^{5}/_{7},\ ^{5}/_{9},\ ^{5}/_{11},\ ^{5}/_{6},$$

видимъ, что послѣдняя изъ нихъ, т. е. $^{5}/_{6}$ болѣе прочихъ, ибо дробь $^{5}/_{6}$ показываетъ, что отъ 5 цѣлыхъ взята часть *шестая*, между тѣмъ какъ прочими дробями означаются *седьмая*, *девятая* и *одиннадцатая* части отъ тѣхъ же 5 цѣлыхъ. Это показываетъ, что *изъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та менѣе, у которой знаменатель болѣе знаменателей прочихъ дробей.*

Но если сравнимъ между собою нѣсколько дробей съ одинакими знаменателями и разными числителями, напримѣръ:

$$^{5}/_{8},\ ^{7}/_{8},\ ^{3}/_{8},$$

то увидимъ, что въ дроби $^{7}/_{8}$ недостаетъ до цѣлаго только одной *осьмой*, между тѣмъ какъ въ дроби $^{3}/_{8}$ недостаетъ трехъ такихъ частей, а въ $^{3}/_{8}$—пяти. Поэтому *изъ всѣхъ дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, бо́льшая та, у которой числитель болѣе всѣхъ прочихъ числителей.*

Слѣдовательно дробь увеличивается, а потому и приближается къ единицѣ, по мѣрѣ того, что числитель ея, при томъ же знаменателѣ, увеличивается; уменьшается же тогда, когда знаменатель ея увеличивается, а числитель остается тотъ же.

Отсюда опять удостовѣряемся въ томъ, о чемъ уже прежде знали: *что всѣ тѣ дроби, въ которыхъ числитель равенъ знаменателю, равны единицѣ.* Таковы: $^5/_5$, $^7/_7$, $^9/_9$, $^{10}/_{10}$ и проч.

Если станемъ продолжать увеличивать числителя, оставляя знаменателя неизмѣннымъ, то получимъ такія дробныя выраженія, которыя не только будутъ равны единицѣ, но и болѣе ея. Такъ $^6/_5$ дробное выраженіе, которое болѣе единицы, потому что $^6/_5$ все равно, что $^5/_5$ и $^1/_5$, а $^5/_5 = 1$; поэтому $^6/_5$ означаетъ 1 и еще $^1/_5$.

Такимъ образомъ, при дальнѣйшемъ увеличеніи числителя дробь можетъ содержать въ себѣ двѣ, три, четыре и болѣе единицъ. Напримѣръ:

дробь $^{10}/_5 = {}^5/_5 + {}^5/_5 = 2$ цѣлымъ;
» $^7/_3 = {}^3/_3 + {}^3/_3 + {}^1/_3 = 2^1/_3$;
» $^{11}/_3 = {}^3/_3 + {}^3/_3 + {}^3/_3 + {}^2/_3 = 3^2/_3$ и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что, опредѣливъ дробь *частію цѣлаго или совокупленіемъ нѣсколькихъ частей*, подъ словомъ *нѣсколько* можемъ разумѣть всякое число, хотя бы оно было даже болѣе числа частей, на которыя какое-либо цѣлое раздѣлено.

Примѣчаніе. Дроби, которыхъ числители равны своимъ знаменателямъ или болѣе ихъ, обыкновенно называютъ *неправильными дробями* — выраженіе, усвоенное временемъ, хотя въ сущности мало объясняющее.

Цѣлыя числа съ дробями, въ совокупности, называются числами *смѣшанными.* Такъ

$2^1/_2$, $5^3/_6$, $7^2/_3$ смѣшанныя числа.

Дроби, имѣющія одинакихъ знаменателей, называются также *однородными*; таковы, напримѣръ: $^7/_8$, $^5/_8$, $^3/_8$; дроби же съ разными знаменателями — *разнородными*; напримѣръ: $^2/_3$, $^5/_7$, $^8/_{11}$ и проч.

§ 9.

ОБРАЩЕНІЕ ЦѢЛЫХЪ И СМѢШАННЫХЪ ЧИСЕЛЪ ВЪ ДРОБИ, И ОБРАТНО.

а) Если цѣлое = $^2/_2$, $^3/_3$, $^4/_4$, $^5/_5$ и т. д.
то 2 цѣлыхъ = $^4/_2$, $^6/_3$, $^8/_4$, $^{10}/_5$ и т. д.
» 3 » = $^6/_2$, $^9/_3$, $^{12}/_4$, $^{15}/_5$ и т. д.
» 4 » = $^8/_2$, $^{12}/_3$, $^{16}/_4$, $^{20}/_5$ и т. д.
» 5 » = $^{10}/_2$, $^{15}/_3$, $^{20}/_4$, $^{25}/_5$ и т. д.
» 6 » = $^{12}/_2$, $^{18}/_3$, $^{24}/_4$, $^{30}/_5$ и т. д.
и проч. и проч.

б) $1 = {}^{2}/_{2}$,
$1^{1}/_{2} = {}^{3}/_{2}$,
$2 = {}^{4}/_{2}$,
$1 = {}^{3}/_{3}$,
$1^{1}/_{3} — {}^{4}/_{3}$,
$1^{2}/_{3} = {}^{5}/_{3}$,
$2 = {}^{6}/_{3}$,
$2^{1}/_{3} = {}^{7}/_{3}$,
$2^{2}/_{3} = {}^{8}/_{3}$,
$3 = {}^{9}/_{3}$,
и проч.

$2^{1}/_{2} = {}^{5}/_{2}$,
$2 = {}^{6}/_{2}$,
$3^{1}/_{2} = {}^{7}/_{2}$ и проч.
$1 = {}^{4}/_{4}$,
$1^{1}/_{4} = {}^{5}/_{4}$,
$1^{2}/_{4} = {}^{6}/_{4}$,
$1^{3}/_{4} = {}^{7}/_{4}$,
$2 = {}^{8}/_{4}$,
$2^{1}/_{4} = {}^{9}/_{4}$,
$2^{2}/_{4} = {}^{10}/_{4}$,
$2^{3}/_{4} = {}^{11}/_{4}$ и проч.

в) ${}^{2}/_{2} = 1$,
${}^{3}/_{2} = 1^{1}/_{2}$,
${}^{4}/_{2} = 2$,
${}^{5}/_{2} = 2^{1}/_{2}$,
${}^{6}/_{2} = 3$,
${}^{7}/_{2} = 3^{1}/_{2}$,
${}^{8}/_{2} = 4$,
и проч.

${}^{3}/_{3} = 1$,
${}^{4}/_{3} = 1^{1}/_{3}$,
${}^{5}/_{3} = 1^{2}/_{3}$,
${}^{6}/_{3} = 2$,
${}^{7}/_{3} = 2^{1}/_{3}$,
${}^{8}/_{3} = 2^{2}/_{3}$,
${}^{9}/_{3} = 3$,
${}^{10}/_{3} = 3^{1}/_{3}$,
и проч.

${}^{4}/_{4} = 1$,
${}^{5}/_{4} = 1^{1}/_{4}$,
${}^{6}/_{4} = 1^{2}/_{4}$,
${}^{7}/_{4} = 1^{3}/_{4}$,
${}^{8}/_{4} = 2$,
${}^{9}/_{4} = 2^{1}/_{4}$,
${}^{10}/_{4} = 2^{2}/_{4}$,
${}^{11}/_{4} = 2^{3}/_{4}$,
и проч.

г) ${}^{100}/_{2} = 50$,
${}^{99}/_{2} = 49^{1}/_{2}$,
${}^{98}/_{2} = 49$,
${}^{97}/_{2} = 48^{1}/_{2}$,
${}^{96}/_{2} = 48$,
${}^{95}/_{2} = 47^{1}/_{2}$,
и проч.

${}^{100}/_{3} = 33^{1}/_{3}$,
${}^{99}/_{3} = 33$,
${}^{98}/_{3} = 32^{2}/_{3}$,
${}^{97}/_{3} = 32^{1}/_{3}$,
${}^{96}/_{3} = 32$,
${}^{95}/_{3} = 31^{2}/_{3}$,
${}^{94}/_{3} = 31^{1}/_{3}$,
и проч.

${}^{100}/_{4} = 25$,
${}^{99}/_{4} = 24^{3}/_{4}$,
${}^{98}/_{4} = 24^{2}/_{4}$,
${}^{97}/_{4} = 24^{1}/_{4}$,
${}^{96}/_{4} = 24$,
${}^{95}/_{4} = 23^{3}/_{4}$,
${}^{94}/_{4} = 23^{2}/_{4}$,
${}^{93}/_{4} = 23^{1}/_{4}$,
${}^{92}/_{4} = 23$,
и проч.

Задача. *Узнать, сколько въ 2, 3, 4, 5 цѣлыхъ содержится пятыхъ.*

2 цѣл. $= {}^{10}/_{5}$; 3 цѣл. $= {}^{15}/_{5}$; 4 цѣл. $= {}^{20}/_{5}$; 5 цѣл. $= {}^{25}/_{5}$; ибо если на каждое цѣлое приходится ${}^{5}/_{5}$, то на два цѣлыхъ придется $2 \times {}^{5}/_{5}$ или ${}^{10}/_{5}$; на 3 цѣлыхъ $3 \times {}^{5}/_{5}$ или ${}^{15}/_{5}$ и т. д.

Задача. *Обратить 49 цѣлыхъ въ 13 доли.*

Такъ какъ каждое цѣлое имѣетъ ${}^{13}/_{13}$, то для обращенія 49

цѣлыхъ въ 13 доли надобно 49 умножить на 13 и произведеніе раздѣлить на 13.

$$49 = \frac{49 \times 13}{13} = \frac{637}{13}$$

Задача. Обратить $3^5/_8$ въ осьмыя доли.

Привести $3^5/_8$ въ осьмыя доли значитъ тоже, что узнать, сколько вмѣсто $3^5/_8$ можно имѣть всего осьмыхъ долей. Въ такомъ случаѣ число 3 приводимъ въ осьмыя доли и къ полученному числу прибавляемъ еще $^5/_8$. Это можно представить такъ:

$$3^5/_8 = \frac{3 \times 8}{8} + {}^5/_8 = \frac{24 + 5}{8} = {}^{29}/_8$$

Отсюда ясно, что *для обращенія смѣшаннаго числа въ дробь надо цѣлое число умножить на знаменателя стоящей подлѣ него дроби и къ произведенію придать числителя той же дроби, — чрезъ что получится числитель искомой дроби; знаменателемъ же ея будетъ знаменатель той же дроби, которая вмѣстѣ съ цѣлымъ составляетъ обращаемое смѣшанное число.*

Обратно, *если числитель болѣе знаменателя, то число цѣлое исключается изъ дроби чрезъ дѣйствительное дѣленіе ея числителя на знаменателя. Во всякомъ случаѣ, если знаменатель такой дроби содержится въ числителѣ ея одинъ или нѣсколько разъ безъ остатка, дробь равна цѣлому, и есть только видоизмѣненіе его. Если же знаменатель не содержится въ числителѣ равнаго числа разъ, безъ остатка, то въ такомъ случаѣ получится смѣшанное число: частное, происходящее отъ раздѣленія числителя на знаменателя, будетъ означать цѣлое, а остатокъ, получаемый отъ дѣленія, — числителя новой дроби, которой знаменателемъ будетъ прежній.*

§ 10.

РАЗЛИЧНЫЯ ИСЧИСЛЕНІЯ НАДЪ ОДНОРОДНЫМИ ИЛИ ОДИНАКОВОЗНАМЕНАТЕЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ.

Надъ однородными дробями или имѣющими одинакихъ знаменателей, какъ и надъ цѣлыми числами, можно непосредственно производить различныя дѣйствія; т. е. разлагать ихъ на основныя части, складывать одну съ другою, вычитать одну изъ другой, дѣлить одну на другую, наконецъ увеличивать какую-либо дробь въ нѣсколько разъ.

а) *Разложеніе.*

Какъ какое-либо цѣлое можно разложить на меньшія, тоже цѣлыя числа, такъ и каждую дробь на другія меньшія части.

1) $^8/_{11} = {}^4/_{11} + {}^4/_{11}$, или $^2/_{11} + {}^2/_{11} + {}^2/_{11} + {}^2/_{11}$, или $^7/_{11} + {}^1/_{11}$, или $^3/_{11} + {}^4/_{11} + {}^1/_{11}$ и т. д.

2) $^{15}/_7 = {}^6/_7 + {}^6/_7 + {}^3/_7 = {}^4/_7 + {}^6/_7 + {}^5/_7$ и т. д.

3) $3^5/_6 = {}^{23}/_6 = {}^{18}/_6 + {}^5/_6 = {}^{20}/_6 + {}^3/_6 = {}^{19}/_6 + {}^4/_6$ и т. д.

б) *Сложеніе.*

$^1/_4 + {}^3/_4 = {}^4/_4 = 1$;
$^5/_9 + {}^3/_9 = {}^8/_9$;
$^7/_9 + {}^8/_9 = {}^{15}/_9 = 1^6/_9$;
$^7/_{12} + {}^3/_{12} + {}^5/_{12} = {}^{15}/_{12} = 1^3/_{12}$ и т. д.

Какъ поступаютъ при сложеніи однородныхъ дробей?

в) *Вычитаніе.*

$^8/_9 - {}^4/_9 = {}^4/_9$;
$^{11}/_{12} - {}^8/_{12} = {}^3/_{12}$;
$1 - {}^2/_7 = {}^7/_7 - {}^2/_7 = {}^5/_7$;
$2^1/_5 - {}^4/_5 = {}^{11}/_5 - {}^4/_5 = {}^7/_5$.

Какъ поступаютъ при вычитаніи одной однородной дроби изъ другой? — Какъ поступаютъ въ томъ случаѣ, когда дробь, принадлежащая къ смѣшанному числу, будетъ менѣе вычитаемой дроби?

Вотъ еще нѣсколько задачъ для упражненія.

1) Разложить дробь $^8/_9$ на двѣ неравныя части и показать, чѣмъ одна изъ нихъ болѣе или менѣе другой.

2) Разложить $^6/_7$ на 2 неравныя части такъ, чтобъ одна изъ нихъ была болѣе другой вдвое.

3) Разложить $^7/_{10}$ на двѣ неравныя части такъ, чтобъ одна часть была болѣе другой на *одну десятую.*

4) Разложить $^9/_8$ на такія двѣ неравныя доли, что если отъ большей изъ нихъ отнять $^1/_8$, то останутся двѣ равныя части.

г) *Умноженіе дробей.*

$^1/_2 \times 2 = {}^2/_2 = 1$;
$^1/_2 \times 3 = {}^3/_2 = 1^1/_2$;
$^1/_2 \times 4 = {}^4/_2 = 2$;
$^1/_2 \times 5 = {}^5/_2 = 2^1/_2$;
$^1/_2 \times 6 = {}^6/_2 = 3$;
$^1/_2 \times 7 = {}^7/_2 = 3^1/_2$ и т. д.

$^1/_3 \times 2 = {}^2/_3$;
$^1/_3 \times 3 = {}^3/_3 = 1$;
$^1/_3 \times 4 = {}^4/_3 = 1^1/_3$;
$^1/_3 \times 5 = {}^5/_3 = 1^2/_3$ и т. д.

$^2/_3 \times 2 = {}^4/_3 = 1^1/_3$;
$^2/_3 \times 3 = {}^6/_3 = 2$;
$^2/_3 \times 4 = {}^8/_3 = 2^2/_3$;
$^2/_3 \times 5 = {}^{10}/_3 = 3^1/_3$ и т. д.

$^3/_4 \times 2 = {}^6/_4 = 1^2/_4$;
$^3/_4 \times 3 = {}^9/_4 = 2^1/_4$;
$^3/_4 \times 4 = {}^{12}/_4 = 3$ и т. д.

Это показываетъ, *чтобъ увеличить какую-либо дробь въ 2, 3, 4 5 и болѣе разъ, надобно числителя ея умножить на 2, 3, 4, 5 и болѣе разъ, а знаменателя оставить прежняго.*

д) *Дѣленіе дробей.*

$^1/_2$ вдвое болѣе $^1/_4$;
$^1/_3$ » » $^1/_6$;
$^1/_4$ » » $^1/_8$;
$^1/_5$ » » $^1/_{10}$ и т. д.

$^1/_2$ втрое болѣе $^1/_6$;
$^1/_3$ » » $^1/_9$;
$^1/_4$ » » $^1/_{12}$;
$^1/_5$ » » $^1/_{15}$ и т. д.

$^2/_3$ вчетверо болѣе $^2/_{12}$;
$^3/_4$ » » $^3/_{16}$;
$^4/_5$ » » $^4/_{20}$ и т. д.

Изъ этого слѣдуетъ, *чтобы дробь уменьшить вдвое, или раздѣлить на 2, надобно ея знаменателя умножить на 2; чтобы уменьшить ее въ три раза, нужно знаменателя ея умножить на три и т. д.; вообще чтобы уменьшить какую-либо дробь въ 2, 3, 4, 5, 6 и болѣе разъ, надо знаменателя ея умножить на 2, 3, 4, 5, 6 и болѣе разъ.*

Уменьшить дробь въ 2, 3, 4, 5 и болѣе разъ тоже значитъ, что взять отъ нея половину, треть, четверть, пятую и т. д. доли. Такъ раздѣлить $^1/_2$ на 2 все тоже, что отъ $^1/_2$ взять *половину*, или получить $^1/_4$.

$^3/_4 : 5$ все тоже, что $^1/_5$ отъ $^3/_4 = {}^3/_{20}$.

Сколько составляетъ $^1/_3$ *отъ* $^1/_3$?

Отвѣтъ. $^1/_9$; ибо $3 \times {}^1/_9 = {}^3/_9 = {}^1/_3$.

Такимъ образомъ легко понять слѣдующіе ряды:

$^1/_2$ отъ $^1/_2$ = $^1/_4$;
$^1/_2$ » $^1/_3$ = $^1/_6$;
$^1/_2$ » $^1/_4$ = $^1/_8$;
$^1/_2$ » $^1/_5$ = $^1/_{10}$ и т. д.

$^1/_3$ отъ $^1/_2$ = $^1/_6$;
$^1/_3$ » $^1/_3$ = $^1/_9$;
$^1/_3$ » $^1/_4$ = $^1/_{12}$;
$^1/_3$ » $^1/_5$ = $^1/_{15}$ и т. д.

$^1/_3$ отъ $^4/_5$ = ?
$^1/_7$ » $^8/_9$ = ?
$^1/_4$ » $^5/_9$ = ?

§ 11.

ПОВТОРЕНІЕ ВСЕГО ПРОЙДЕННАГО О ДРОБЯХЪ.

Учащіеся хорошо поняли предыдущія упражненія въ дробяхъ, если они въ состояніи теперь вѣрно и скоро отвѣчать на слѣдующіе вопросы.

1) *О дробяхъ вообще и ихъ составныхъ частяхъ.*

Что такое дробь? — Какъ называются части единицы, раздѣленной на 8, 4, 5, 13 равныхъ частей? — Что получится, если *единицу* раздѣлить на 3, 10, 12, 17 равныхъ частей? — Что надо сдѣлать съ цѣлымъ, чтобы получить дроби $^1/_5$, $^1/_9$, $^1/_{25}$? — Какъ получаются дроби $^4/_7$. $^8/_{15}$, $^2/_3$? — Въ дроби $^3/_5$ сколько и какихъ частей недостаетъ до цѣлаго? — 1 фунтъ какую часть составляетъ отъ пуда? — 4 фута сколько и какихъ частей составляютъ отъ 1 сажени? — Что такое числитель? — Какому числу въ дѣленіи соотвѣтствуетъ числитель? — Что разумѣютъ подъ именемъ знаменателя? — Какое общее названіе имѣютъ оба числа, составляющія собою дробь? — Знаменатель дроби соотвѣтствуетъ какому вопросу? — А числитель? — Наименуйте нѣсколько дробей, которыя имѣютъ одинакихъ знаменателей, а разныхъ числителей? — Отчего всякая дробь получаетъ свое имя: отъ числителя или знаменателя? — Чему равны всѣ такія дроби, у которыхъ числители одинаковы съ ихъ знаменателями?

2) *Взаимное сравненіе дробей.*

Изъ двухъ дробей, имѣющихъ одинаковыхъ знаменателей, которая болѣе? — Что дѣлается съ дробью по мѣрѣ того, что знаменатель ея увеличивается, а числитель остается прежній? — Что бу-

деть съ дробью, если при томъ же знаменателѣ числитель ея увеличится? — Можетъ ли быть въ дроби знаменатель менѣе числителя? — Что называется смѣшаннымъ числомъ? — Что такое *однородныя* и *разнородныя* дроби?

3) *Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дроби, и обратно.*

Обратите 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. въ половины, трети, четверти и т. д. — Какъ поступаютъ при обращеніи цѣлаго числа въ дробь? — Какія дроби равны 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.? — Обратите $2^1/_3$, $5^1/_7$, $4^3/_5$, $3^3/_4$ въ дроби? — Какъ цѣлое число исключается изъ дроби, у которой числитель болѣе знаменателя, или какъ такая дробь обращается въ смѣшанное число?

Слѣдующія дроби: $^{10}/_3$, $^{15}/_7$, $^{109}/_{13}$, $^{12}/_5$ обратите въ смѣшанныя числа. — Какое изъ четырехъ дѣйствій употребляется при приведеніи цѣлаго числа въ дробь?

4) *Разложеніе дробей.*

Разложите дробь $^7/_{11}$ на меньшія дроби. — Разложите $^9/_{10}$ на три равныя дроби. — Разложите дробь $^{10}/_{13}$ на такія четыре неравныя части, чтобы вторая была *вдвое*, третья *втрое*, а четвертая *вчетверо* болѣе первой части.

5) *Сложеніе дробей съ одинакими знаменателями.*

Найти сумму дробей: $^1/_8 + ^3/_8 + ^4/_8$. Чему равна сумма дробей: $^5/_{12} + ^7/_{12} + ^{11}/_{12}$? — Сколько составитъ 5 ц. + $^3/_4$ цѣлаго? — Къ $7^4/_9$ прибавьте $^7/_9$ — Отыщите сумму ряда такихъ дробей, которыхъ числители составляютъ числа, по порядку взятыя, отъ 1 до 20, а знаменатель у всѣхъ дробей общій, именно 13. — Какое можно составить правило для сложенія дробей съ одинакими знаменателями?

6) *Вычитаніе дробей съ одинакими знаменателями.*

Чему равна разность между $^5/_6$ и $^1/_6$? — Изъ $^{11}/_{14}$ вычесть $^7/_{14}$.— Чѣмъ $^5/_9$ менѣе $^8/_9$? — Чѣмъ $^{13}/_{16}$ болѣе $^2/_{16}$? — Что къ $^3/_7$ надобно прибавить, чтобы вышло $^6/_7$? — Цѣлое безъ $^5/_8$ = ? Но $1^2/_5 - ^4/_5$ =? — Какая разность между 2 ц. и $^4/_5$ цѣл.? — Чѣмъ смѣшанное число $3^5/_{10}$ болѣе другаго смѣшаннаго числа $2^3/_{10}$? — Что должно прибавить къ числу $2^8/_{11}$, чтобы получить $4^2/_{11}$? — Какое правило для вычитанія можно вывести изъ приведенныхъ примѣровъ?

7) *Сложеніе и вычитаніе дробей, въ совокупности.*

Если къ неизвѣстному числу прибавить сперва $^4/_7$, а потомъ $^6/_7$, то получится ровно 2. Чему равно неизвѣстное число? $(2^5/_8 + ^7/_8) - (2^1/_8 + ^{10}/_8) = ?$ — Чѣмъ $^5/_{13} + ^{11}/_{13}$ болѣе или менѣе $^{10}/_{13} + ^5/_{13} + ^9/_{13}$?

8) *Умноженіе дроби на цѣлое число.*

Найти число, которое бы было въ 7 разъ болѣе $^5/_8$. — Что составитъ $^2/_3$ отъ числа 14? — Возьмите отъ числа 100 двѣ трети

доли, приложите къ нимъ $19^1/_3$, тогда узнаете число, которое я задумалъ. — Какъ вообще поступаютъ при умноженіи цѣлаго числа на дробь?

9) *Дѣленіе дроби на цѣлое число.*

Что надобно сдѣлать съ дробью, чтобы уменьшить ее въ 2, 3, 4, 5 и болѣе разъ? — Всегда ли дѣлится числитель дроби на 2, 3, 4 и проч., когда требуется самую дробь уменьшить въ 2, 3, 4, и болѣе разъ? — Какъ же поступаютъ при дѣленіи дроби на цѣлое число? — Уменьшить дроби: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$ въ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 разъ. Раздѣлить дроби $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^6/_7$, $^8/_9$, на 2, 3, 4, 5, 6, 7.

10) *Умноженіе дроби на дробь.*

Что означаетъ выраженіе: $^1/_2 \times ^1/_3$? — (Половину отъ одной трети цѣлаго, или треть отъ одной половины). — Объясните выраженіе $^2/_3 \times ^4/_5$. — (Двѣ трети четырехъ пятыхъ или четыре пятыя двухъ третей). Что составитъ $^1/_9$ отъ $^5/_9$? — Какое можно вывести правило для перемноженія двухъ дробей?

§ 12.

РАЗЛИЧНЫЯ ИЗМѢНЕНІЯ ДРОБЕЙ.

Изъ предыдущаго видѣли, какъ легко производить различныя исчисленія надъ дробями, имѣющими одинакихъ знаменателей; но какъ производить тѣ же дѣйствія надъ дробями съ разными знаменателями? — Какъ, напримѣръ, сложить $^3/_4$ съ $^2/_3$, или изъ $^3/_6$ вычесть $^2/_3$?

Размышляя надъ рѣшеніемъ этихъ вопросовъ, придемъ къ тому заключенію, что разнородныя дроби, какъ и вообще разнородныя величины, ни непосредственно сложены одна съ другою, ни вычтены одна изъ другой быть не могутъ. Сложить $^3/_4$ съ $^2/_3$ все равно, что сложить, напр. 5 пудовъ съ 17 фунт.: чтобъ узнать однимъ числомъ, сколько всего получится здѣсь фунтовъ, или пудовъ, надобно прежде 5 пудовъ привести въ фунты, или, обратно, фунты въ пуды. Тоже и съ разнородными дробями: прежде нежели ихъ сложить одну съ другою, или вычесть одну изъ другой, надо привести ихъ въ одинакія части. Слѣдовательно различныя дѣйствія надъ дробями, имѣющими разныхъ знаменателей, зависятъ отъ предварительнаго разрѣшенія слѣдующаго вопроса: *какъ дроби, имѣющія разныхъ знаменателей, обратить или измѣнить въ дроби, имѣющія одинакихъ знаменателей?*

Сначала обратимъ вниманіе вообще на *различныя измѣненія дробей*, такъ какъ отъ этого зависитъ рѣшеніе вопроса.

1) *Если къ числителю дроби прибавимъ какое-нибудь число, то дробь увеличится, и увеличится на столько частей, однородныхъ съ тѣми, которыя выражаются самою дробью, сколько единицъ въ прибавляемомъ цѣломъ числѣ.*

Напримѣръ. Прибавивъ къ числителю дроби $^2/_7$ число *три*, получимъ $^5/_7$, т. е. дробь, которая *тремя* долями (седьмыми) болѣе $^2/_7$. $^5/_{11}$ менѣе $\frac{5+4}{11}$ или $^9/_{11}$ четырьмя долями, и т. д.

2) *Если къ знаменателю дроби прибавимъ какое-либо число, то дробь уменьшится.*

Напримѣръ: $^2/_7$ болѣе $\frac{2}{7+4}$ или $^2/_{11}$ (здѣсь доли изъ седьмыхъ сдѣлались одиннадцатыми).

3) *Если къ обоимъ членамъ дроби прибавится одно и тоже число, то получаемая отъ этого дробь будетъ болѣе предложенной, и чѣмъ прилагаемое число будетъ болѣе, тѣмъ и дробь болѣе.*

Пусть, напримѣръ, къ обоимъ членамъ дроби $^7/_{15}$ прибавимъ по числу 4; тогда вмѣсто $^7/_{15}$ получимъ $\frac{7+4}{15+4}$ или $^{11}/_{19}$. Но $^{11}/_{19}$ болѣе $^7/_{15}$, потому что $^{11}/_{19}$ ближе подходитъ къ единицѣ, нежели $^7/_{15}$, такъ какъ разность между 1 и $^7/_{15}$ есть $^8/_{15}$, а между 1 и $^{11}/_{19}$ есть $^8/_{19}$; $^8/_{19}$ менѣе $^8/_{15}$; — что очевидно, ибо изъ двухъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та менѣе, которой знаменатель болѣе знаменателя другой дроби (см. § 8).

4) Обратно, *дробь уменьшится, если изъ обоихъ ея членовъ вычтется какое-либо цѣлое число, и она будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться по мѣрѣ увеличенія вычитаемаго числа.*

Пусть, для примѣра, изъ обоихъ членовъ дроби $^{13}/_{19}$ вычтется по числу 5; тогда въ остаткѣ выйдетъ $\frac{13-5}{19-5} = {}^8/_{14}$. Дробь $^8/_{14}$ менѣе данной дроби $^{13}/_{19}$, ибо въ $^8/_{14}$ до цѣлаго недостаетъ $^6/_{14}$, а въ $^{13}/_{19}$ только $^6/_{19}$; но чѣмъ бо́льшая разность между *единицею* и *дробью*, тѣмъ самая дробь менѣе.

5) *Если, оставляя неизмѣннымъ знаменателя дроби, умножимъ, или раздѣлимъ, числителя ея на какое-либо одно число, то полученная новая дробь будетъ во столько же разъ болѣе, или менѣе первой, сколько во множитель, или дѣлитель, было единицъ.*

Дѣйствительно, чрезъ умноженіе числителя дроби на 2, 3, 4, 5 . . . . . показываемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ бо-

лѣе частей, нежели сколько было прежде взято; но какъ части остаются тѣ же самыя, то и выходитъ, что новая дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ болѣе прежней. Обратно, раздѣляя числителя на 2, 3, 4, 5 . . . . . этимъ означаемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ менѣе частей, нежели сколько въ началѣ было въ дроби; поэтому самая дробь уменьшится въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ.

Примѣры.

Дробь $\frac{3 \times 2}{15}$ или $^6/_{15}$ вдвое болѣе $^3/_{15}$;

» $\frac{3 \times 3}{15}$ или $^9/_{15}$ втрое болѣе $^3/_{15}$;

» $\frac{3 \times 4}{15}$ или $^{12}/_{15}$ вчетверо болѣе $^3/_{15}$ и т. д.

Обратно:

Дробь $\frac{12 : 2}{15}$ или $^6/_{15}$ вдвое менѣе $^{12}/_{15}$;

» $\frac{12 : 3}{15}$ или $^4/_{15}$ втрое менѣе $^{12}/_{15}$

» $\frac{12 : 4}{15}$ или $^3/_{15}$ вчетверо менѣе $^{12}/_{15}$ и т. д.

6) *Если, не перемѣняя числителя, умножимъ, или раздѣлимъ, знаменателя дроби на какое-либо число, то дробь уменьшится, или увеличится, во столько разъ, сколько во множителѣ, или дѣлителѣ находится единицъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, умножая знаменателя на 2, 3, 4, 5 . . . . . уменьшаемъ части цѣлаго тоже въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ, между тѣмъ какъ число ихъ остается прежнее: значитъ, что и полученная отсюда дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ менѣе прежней. Раздѣляя же знаменателя на 2, 3, 4, 5 . . . . . получаемъ наоборотъ, дробь болѣе данной въ 2, 3, 4, 5 . . . . . разъ; ибо при томъ же числѣ частей, части сами по себѣ становятся крупнѣе.

§ 13.

ВИДОИЗМѢНЕНІЕ ДРОБЕЙ БЕЗЪ ИЗМѢНЕНІЯ ИХЪ ВЕЛИЧИНЫ.

Такъ какъ чрезъ умноженіе числителя дроби на какое-либо число, самая дробь увеличивается во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ, а чрезъ умноженіе ея знаменателя на тоже число, она во столько же разъ уменьшается, то изъ этого слѣдуетъ, что

чрезъ умноженіе обоихъ членовъ дроби на одно и тоже число во сколько разъ числитель ея увеличится, во столько разъ знаменатель уменьшится: значитъ самая дробь не измѣнитъ своей величины, а только представится въ другомъ видѣ. Такъ дроби $^5/_8$ и $^{15}/_{24}$ равны между собою, потому что какъ числитель второй дроби втрое болѣе числителя первой, такъ и знаменатель второй тоже втрое болѣе знаменателя первой дроби. Дробь $^{15}/_{24}$ есть только *видоизмѣненіе* дроби $^5/_8$. Въ самомъ дѣлѣ, если на $^1/_8$ приходится $^3/_{24}$, то на $^5/_8$ должно приходиться въ пять разъ болѣе $^3/_{24}$; т. е. $\frac{5 \times 3}{24}$ или $^{15}/_{24}$.

Обратно: если оба члена дроби раздѣлимъ на одно и то же число, то во сколько разъ чрезъ это дѣленіе уменьшится числитель, во столько же уменьшится и знаменатель: поэтому тоже дробь не перемѣнится. Напримѣръ, раздѣливъ числителя и знаменателя дроби $^{20}/_{25}$ на 5, получимъ дробь $^4/_5$, которая хотя представляется въ меньшихъ числахъ, однакожь равна дроби $^{20}/_{25}$. Дѣйствительно, на $^1/_5$ причитается $^5/_{25}$, а на $^4/_5$ въ четыре раза болѣе, т. е. $^{20}/_{25}$.

Такимъ образомъ получаемъ средство *видоизмѣнять* дроби; т. е. во-первыхъ, дроби, имѣющія разныхъ знаменателей, приводить въ равнозначащія имъ дроби, которыя имѣютъ одинакихъ знаменателей; во вторыхъ, сокращать дроби, когда онѣ выражены въ большихъ числахъ.

а) *Приведеніе неоднородныхъ дробей въ однородныя.*

Приводить дроби въ одинаковыя доли значитъ приводить ихъ къ одинаковому знаменателю. Здѣсь могутъ быть слѣдующіе три случая: 1) когда знаменатели данныхъ дробей находятся въ такомъ между собою отношеніи, что бо̀льшій изъ нихъ содержитъ въ себѣ всѣхъ прочихъ безъ остатка; 2) когда бо̀льшій изъ нихъ не содержитъ въ себѣ безъ остатка всѣхъ прочихъ, однакожь данные знаменатели не первыя между собою числа, и 3) когда они числа первыя между собою.

1-й случай. Когда знаменатели данныхъ дробей находятся въ такомъ между собою отношеніи, что большій изъ нихъ содержитъ въ себѣ всѣхъ прочихъ безъ остатка.

Примѣръ. Требуется привести къ одинакому знаменателю (въ однородныя доли) *слѣдующія дроби:* $^5/_6$, $^3/_8$, $^2/_3$, $^{12}/_{24}$.

Здѣсь, какъ видно, числа 6, 8, 3 дѣлители числа 24. Итакъ, чтобъ узнать, на какія числа оба члена каждой дроби должны быть

умножены, стоитъ только 24 раздѣлить послѣдовательно на 6, 8, 3. Раздѣляя послѣдовательно число 24 на 6, 8, 3, получимъ множителей: для первой дроби 4, для второй 3, а для третьей 8. Если помножимъ числителя и знаменателя первой дроби на 4, числителя и знаменателя второй на 3, а числителя и знаменателя третьей на 8, то и получимъ дроби, выраженныя въ 24 доляхъ.

Дѣйствіе располагается такъ:

$$5/6 = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = 20/24,$$

$$3/8 = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = 9/24,$$

$$2/3 = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = 16/14$$

$$12/24 = 12/24.$$

Или такъ:

	24	
$5/6$	4	20
$3/8$	3	9
$2/3$	8	16
$12/24$	1	12

Изъясненіе. Данныя дроби пишутся въ одной поперечной строкѣ, а за ними, съ правой стороны за чертою, соотвѣтственные каждой множители; общій же знаменатель помѣщается вверху, надъ чертою. Для нахожденія множителя каждой отдѣльной дроби, общаго знаменателя (который здѣсь самый большій изъ данныхъ), дѣлятъ послѣдовательно на прочихъ знаменателей: каждое частное показываетъ множителя той дроби, на знаменателя которой произведено дѣленіе. Когда всѣ множители такимъ образомъ отысканы, то помножаютъ ихъ по порядку на соотвѣтственнаго каждому числителя и произведенія пишутъ въ третій поперечный рядъ съ правой стороны, за новою чертою. Эти произведенія и суть числители преобразованныхъ дробей, выражающихъ двадцатьчетвертыя доли. Общій знаменатель потому не пишется подъ каждымъ изъ числителей, что онъ, находясь на верху, тотчасъ показываетъ, какъ должно читать полученныя произведенія.

Еще примѣръ. Привести къ одинаковому знаменателю слѣдующія дроби: $5/7$, $2/3$, $10/21$.

Очевидно, что здѣсь большій знаменатель (21) содержитъ въ себѣ безъ остатка прочихъ знаменателей (7 и 3); поэтому для узнанія множителей для первой и второй дробей, надобно 21 раздѣлить сперва на 7, а потомъ на 3.

Выкладка.

	21	
$^{5}/_{7}$	3	15
$^{2}/_{3}$	7	14
$^{10}/_{21}$	1	10

т. е. $^{5}/_{7} = ^{15}/_{21}$, $^{2}/_{3} = ^{14}/_{21}$, $^{10}/_{21} = ^{10}/_{21}$.

Задачи. 1) Привести въ одинакія доли слѣдующія дроби: $^{53}/_{72}$, $^{19}/_{24}$, $^{27}/_{36}$, $^{7}/_{8}$.

2) Слѣдующія неоднородныя дроби обратить въ однородныя: $^{103}/_{504}$, $^{17}/_{56}$, $^{47}/_{72}$, $^{8}/_{9}$, $^{7}/_{8}$, $^{5}/_{7}$.

2-й случай. Когда большій знаменатель не содержитъ въ себѣ безъ остатка всѣхъ прочихъ, однакожь данные знаменатели и не первые между собою числа.

Пусть требуется отыскать общаго знаменателя дробей: $^{17}/_{36}$, $^{5}/_{8}$, $^{11}/_{24}$, $^{3}/_{10}$.

Въ этомъ примѣрѣ число 36 очевидно не можетъ служить общимъ знаменателемъ для всѣхъ дробей, потому что ни 8, ни 24, ни 10 не содержатся въ числѣ 36 безъ остатка. Итакъ за общаго знаменателя надо взять такое число, которое бы раздѣлялось нацѣло и на 8, и на 24, и на 10. Какъ отыскать такое число?

Здѣсь самый большій изъ данныхъ знаменателей 36; хотя знаменатель второй дроби (8) не содержится въ немъ безъ остатка, однакожь его можно разложить на двухъ множителей ($8 = 2 \times 4$), изъ которыхъ каждый дѣлитъ нацѣло число 36. Въ такомъ случаѣ достаточно число 36 помножить на мéньшаго множителя, т. е. на 2, чтобы получить общаго знаменателя двухъ дробей: $^{17}/_{36}$ и $^{5}/_{8}$. Въ самомъ дѣлѣ, число 72 раздѣляется нацѣло и на 36 и на 8: значитъ можетъ служить общимъ знаменателемъ двухъ этихъ дробей. Сравнивая теперь полученное произведеніе (72) съ третьимъ знаменателемъ (24), находимъ, что послѣдній въ 72 содержится безъ остатка, ибо $3 \times 24 = 72$. Отсюда заключаемъ что число 72 не только для дробей $^{17}/_{36}$ и $^{5}/_{8}$ можетъ служить общимъ знаменателелемъ, но также и для дроби $^{11}/_{24}$. Наконецъ, такъ какъ послѣдняго знаменателя (10) можно разложить на множителей: 2×5, и какъ одинъ изъ нихъ, именно число 2, дѣлитъ нацѣло 72, то достаточно умножить 72 на 5, чтобъ получить число, которое будетъ общимъ знаменателемъ всѣхъ данныхъ дробей. Это число 360.

Когда общій знаменатель найденъ, тогда множителей прочихъ дробей легко найти, ибо стоитъ только послѣдовательно раздѣлить число 360 на 36, 8, 24, 10.

Выкладка.

	360	
$^{17}/_{36}$	10	170
$^{5}/_{8}$	45	225
$^{11}/_{24}$	15	165
$^{3}/_{10}$	36	108

$$\text{т. е. } {}^{17}/_{36} = \frac{17 \times 10}{36 \times 10} = {}^{170}/_{360},$$

$$ {}^{5}/_{8} = \frac{5 \times 45}{8 \times 45} = {}^{225}/_{360},$$

$$ {}^{11}/_{24} = \frac{11 \times 15}{24 \times 15} = {}^{165}/_{360},$$

$$ {}^{3}/_{10} = \frac{3 \times 36}{10 \times 36} = {}^{108}/_{360}.$$

Если при нахожденіи общаго знаменателя исключили лишнихъ множителей, то это сдѣлали единственно для того, чтобы получить для общаго знаменателя сколь-возможно мéньшее число, чрезъ что очевидно выкладка значительно сокращается.

Изъ предыдущей выкладки видно, что труднѣе всего находить *наименьшаго общаго знаменателя*; когда же такой знаменатель найденъ, то приведеніе неоднородныхъ дробей въ однородныя становится дѣломъ весьма простымъ.

Но нахожденіе *общаго наименьшаго знаменателя* упростится, если обратимся, для отысканія его, къ опредѣленію первоначальныхъ дѣлителей чиселъ (см. § 3).

Возьмемъ тѣ же дроби: $^{17}/_{36}$, $^{5}/_{8}$, $^{11}/_{24}$, $^{3}/_{10}$.

Разложимъ каждаго изъ данныхъ знаменателей на первоначальныхъ множителей (или дѣлителей, что все равно).

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$

Такъ какъ число 8 состоитъ изъ трижды повтореннаго множителя 2, а въ числѣ 36 входитъ *дважды* число 2 множителемъ, то

достаточно произведеніе $2 \times 2 \times 3 \times 3$ умножить еще на 2, чтобы получить число, которое будетъ дѣлиться нацѣло и на 36 и на 8. Это число есть произведеніе изъ множителей $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, или 72. Но какъ множители числа 24 $(2 \times 2 \times 2 \times 3)$ суть также и множители числа 72, то 72 равномѣрно раздѣлится нацѣло и на 24. Наконецъ, такъ какъ $10 = 2 \times 5$, число 2 входитъ множителемъ въ произведеніе $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, а 5 не входитъ, то достаточно въ послѣднее произведеніе ввести еще множителя 5, чтобы получить число, которое раздѣлится безъ остатка и на послѣдняго знаменателя (10). Это произведеніе и есть $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ или 360.

Отсюда снова убѣждаемся въ томъ, какъ важно, для сокращенія выкладокъ, умѣть находить скоро и вѣрно всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей какого-либо числа, или, все тоже, умѣть разлагать всякое составное число на его первоначальныхъ множителей, т. е. такихъ, которые бы были первыми числами.

При сложеніи и вычитаніи разнородныхъ дробей будемъ имѣть возможность укрѣпиться въ правилѣ нахожденія наименьшаго общаго знаменателя.

3-й случай. Когда знаменатели данныхъ дробей первыя между собою числа.

Примѣръ. Требуется привести въ одинакой величины доли слѣдующія дроби: $^2/_7$, $^3/_5$, $^8/_9$.

Въ этомъ случаѣ нѣтъ возможности получить общаго знаменателя, который бы былъ менѣе произведенія, составленнаго изъ всѣхъ частныхъ знаменателей. Здѣсь общій знаменатель $= 7 \times 5 \times 9$ или 315. Итакъ, чтобы дроби $^2/_7$. $^3/_5$ и $^8/_9$ привести въ одинаковыя доли, для этого надобно числителя и знаменателя первой дроби умножить на произведеніе знаменателей прочихъ дробей, т. е. 5×9, числителя и знаменателя второй дроби на произведеніе знаменателей первой и третьей дробей, т. е. 7×9, а числителя и знаменателя третьей дроби на произведеніе знаменателей двухъ первыхъ дробей, т. е. 7×5.

$$\frac{2 \times 5 \times 9}{7 \times 5 \times 9} = {}^{90}/_{315}$$

$$\frac{3 \times 7 \times 9}{5 \times 7 \times 9} = {}^{189}/_{315}$$

$$\frac{8 \times 7 \times 5}{9 \times 7 \times 5} = {}^{280}/_{315}$$

Изъ всего изложеннаго относительно нахожденія общаго знаменателя можемъ заключить, сколь важно обращать постоянное вниманіе на взаимныя отношенія знаменателей, чтобы получать выкладки по возможности краткія.

б) Сокращеніе дробей.

Цѣль сокращенія дробей состоитъ въ приведеніи ихъ къ простѣйшему виду безъ измѣненія впрочемъ ихъ значенія. Этой цѣли достигаютъ чрезъ раздѣленіе обоихъ членовъ дроби на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя; ибо, какъ мы уже знаемъ, дробь не перемѣнитъ своего значенія, когда числитель и знаменатель ея раздѣлятся на одно и то же число. Такъ, напримѣръ, чтобы сократить дробь $^{12}/_{30}$, замѣчаемъ, что общій наибольшій дѣлитель обоихъ ея членовъ есть 6 (см. § 3). Раздѣливъ и 12, и 30 на 6, получимъ дробь $^{2}/_{5}$, которая не что иное, какъ только видоизмѣненіе дроби $^{12}/_{30}$; ибо $^{1}/_{5} = {}^{6}/_{30}$, а $^{2}/_{5} = \frac{2 \times 6}{30}$ или $^{12}/_{30}$. Дробь $^{2}/_{5}$ болѣе сократиться не можетъ, потому что оба члена ея (2 и 5) первыя между собою числа.

§ 14.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

Въ какомъ сокращенномъ видѣ могутъ быть представлены слѣдующія дроби:

1) $^{8}/_{24}$ 2) $^{9}/_{27}$ 3) $^{12}/_{27}$ 4) $^{21}/_{30}$ 5) $^{123}/_{453}$ 6) $^{261}/_{345}$ 7) $^{987}/_{1623}$ 8) $^{16}/_{23}$ 9) $^{28}/_{96}$ 10) $^{32}/_{44}$ 11) $^{148}/_{228}$ 12) $^{536}/_{944}$ 13) $^{756}/_{832}$ 14) $^{85}/_{105}$ 15) $^{370}/_{145}$ 16) $^{615}/_{700}$ 17) $^{5120}/_{6725}$ 18) $^{848}/_{1368}$ 19) $^{9816}/_{11840}$ 20) $^{7248}/_{9872}$ 21) $^{2984}/_{7360}$ 22) $^{1176568}/_{3890832}$ 23) $^{5781}/_{16251}$ 24) $^{23716}/_{24200}$ 25) $^{1123}/_{9247}$ 26) $^{462}/_{594}$ 27) $^{495}/_{682}$ 28) $^{407}/_{506}$ 29) $^{1440}/_{1800}$ 30) $^{147}/_{245}$ 31) $^{1152}/_{1728}$ 32) $^{1680}/_{2520}$ 33) $^{7920}/_{13200}$ 34) $^{2898}/_{3726}$ 35) $^{5712}/_{6384}$ 36) $^{26180}/_{36960}$.

§ 15.

СЛОЖЕНІЕ ДРОБЕЙ.

Если дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то прежде дѣйствительнаго ихъ сложенія должно привести ихъ въ одинакія части, т. е. къ одинаковому знаменателю, а потомъ поступать такъ, какъ уже было показано при сложеніи дробей съ одинакими знаменателями. Слѣдовательно все дѣло состоитъ теперь въ практикѣ, къ которой прямо и обращаемся.

a) *Найти сумму двухъ дробей:* $5/9$ и $17/30$.

Рѣшеніе. $9 = 3 \times 3$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; очевидно, что общій знаменатель $= 2 \times 3 \times 3 \times 5$ или 90 (§ 13).

$$\begin{array}{l|c|l} & \overbrace{}^{90} & \\ 5/9 & 10 & 50 \\ 17/30 & 3 & \underline{51} \\ & & \dfrac{101}{90} = 1\,11/90 \end{array}$$

Изъясненіе. По отысканіи общаго наименьшаго знаменателя (90), находятъ сумму соотвѣтствующихъ ему числителей (50 и 51), и подъ нею подписываютъ общаго знаменателя. Итакъ дробь $101/90$ есть искомая сумма данныхъ дробей. Но въ этой дроби заключается цѣлое число, и потому, раздѣливъ ея числителя на знаменателя, получимъ вмѣсто ея смѣшанное число $1\,11/90$.

Дѣйствіе располагаютъ еще такъ:

$$5/9 + 17/30 = \frac{150 + 153}{270} = 303/270 = 1\,33/270 \;\Big|\overbrace{11/90}^{3}$$

Изъясненіе. Слагаютъ два произведенія (изъ которыхъ одно получается чрезъ умноженіе числителя первой дроби на знаменателя второй, а второе — чрезъ умноженіе числителя второй дроби на знаменателей первой), и подъ суммою ихъ подписываютъ общаго знаменателя, получаемаго въ произведеніи частныхъ знаменателей; остальное дѣлается какъ и прежде. Но здѣсь въ концѣ находимъ дробь $33/270$, которая по сокращеніи на 3, превращается въ $11/90$.

Подъ этою формою предыдущій примѣръ кратче рѣшается такъ:

$$5/9 \overset{90}{\smile}{+}\, 17/30 = \frac{50 + 51}{90} = 101/90 = 1\,11/90$$

Изъясненіе. Находятъ, по извѣстнымъ правиламъ, самаго меньшаго общаго знаменателя, здѣсь 90, и пишутъ его надъ знакомъ сложенія; потомъ числителя первой дроби (5) помножаютъ на частное (10), происходящее отъ раздѣленія общаго знаменателя на знаменателя той же первой дроби, и числителя второй дроби (17) на частное (3), происходящее отъ раздѣленія того же общаго знаменателя на знаменателя второй дроби и, сложивъ оба произведенія, подписываютъ подъ суммою частей общаго ихъ знаменателя.

б) *Какое получится число, если къ тремъ четвертямъ 195 прибавимъ двѣ трети 100 и три осьмыя 41?*

Рѣшеніе. $^{1}/_{4}$ числа $195 = {}^{195}/_{4}$; $^{3}/_{4}$ числа $195 = \frac{3 \times 195}{4} = {}^{585}/_{4} = 146^{1}/_{4}$; $^{1}/_{3}$ числа $100 = {}^{100}/_{3}$; $^{2}/_{3}$ числа $100 = {}^{200}/_{3} = 66^{2}/_{3}$; $^{1}/_{8}$ числа $41 = {}^{41}/_{8}$ $^{3}/_{8}$ числа $41 = \frac{3 \times 41}{8} = {}^{123}/_{8} = 15^{3}/_{8}$. Поэтому вопросъ приводится къ сложенію чиселъ $146^{1}/_{4}$, $66^{2}/_{3}$ и $15^{3}/_{8}$.

	24	
$146^{1}/_{4}$	6	6
$66^{2}/_{3}$	8	16
$15^{3}/_{8}$	3	9
$227 + {}^{31}/_{24} = 228^{7}/_{24}$		

Изъясненіе. Числа подписываются одно подъ другимъ такъ, чтобы цѣлыя стояли подъ цѣлыми, а дроби подъ дробями; внизу проводится черта, подъ которою пишется и сумма цѣлыхъ и сумма дробей; наконецъ соединяются обѣ суммы въ одну.

в) *Сложить:*

3	версты	$107^{4}/_{7}$	сажени
4	›	$289^{7}/_{42}$	›
9	›	$147^{5}/_{6}$	›
7	›	$300^{2}/_{3}$	›

Очевидно, что здѣсь надобно сперва найти сумму саженъ, а потомъ сумму верстъ: если же въ суммѣ саженъ выйдетъ болѣе знаменательнаго числа (здѣсь 500), то надобно сажени обратить въ версты и послѣднія присовокупить къ суммѣ верстъ.

Слѣдующее рѣшеніе этой задачи понятно безъ всякаго особаго объясненія:

				42	
3	версты	$107^{4}/_{7}$	сажени	6	24
4	›	$289^{7}/_{42}$	›	1	7
9	›	$147^{5}/_{6}$	›	7	35
7	›	$300^{2}/_{3}$	›	14	28
24	версты	$345^{5}/_{21}$	сажени		${}^{94}/_{42} = 2^{10}/_{42} = 2^{5}/_{21}$.

§ 16.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) $^{3}/_{4}$ фунта $+$ $^{7}/_{8}$ фунта $+$ $^{9}/_{10}$ фунта $=$?
2) Сложить дроби: $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{8}$, $^{1}/_{4}$, $^{23}/_{24}$.
3) $^{3}/_{55}$ пуда $+$ $^{7}/_{11}$ пуда $+$ $^{4}/_{5}$ пуда $+$ $^{10}/_{11}$ пуда $=$?
4) $7^{3}/_{12}$ года $+$ $20^{5}/_{8}$ г. $+$ $2^{15}/_{48}$ г. $+$ $125^{7}/_{24}$ г. $+$ $11^{1}/_{4}$ г. $+$ $10^{1}/_{2}$ г. $=$?
5) $^{5}/_{8}$ дести $+$ $^{1}/_{6}$ дести $+$ $^{3}/_{4}$ дести $+$ $^{1}/_{2}$ д. $=$?
6) $^{5}/_{6}$ фунта $+$ $^{2}/_{3}$ ф. $+$ $^{7}/_{8}$ ф. $+$ $^{15}/_{16}$ ф. $+$ $^{19}/_{24}$ ф. $=$?
7) $6^{1}/_{2}$ недѣль $+$ $7^{3}/_{5}$ нед. $+$ $10^{6}/_{7}$ нед. $+$ $9^{11}/_{14}$ нед. $=$?

8) Сложить:
3 фунта
$^{11}/_{15}$ »
$^{5}/_{8}$ »
$^{1}/_{2}$ »
$^{1}/_{6}$ »

9) Сложить:
$^{2}/_{5}$ гривны
$^{3}/_{8}$ »
$^{7}/_{12}$ »
$^{15}/_{22}$ »
$^{11}/_{32}$ »

10)

11	мѣсяцевъ	17	дней	$8^{3}/_{4}$	часовъ
9	»	21	»	$7^{1}/_{2}$	»
1	»	9	»	$11^{5}/_{8}$	»
2	»	16	»	$9^{5}/_{6}$	»
1	»	—	»	$13^{2}/_{3}$	»

11)
$8^{2}/_{3}$ рублей
$3^{5}/_{6}$ »
$7^{1}/_{4}$ »
$8^{3}/_{5}$ »
$1^{11}/_{12}$ »

12) Продано товару:

	ВѢСЪ.	ЦѢНА.	
		Руб.	Коп.
въ понедѣльникъ . .	$5^{3}/_{4}$ ф.	4	$23^{3}/_{4}$
во вторникъ.	$7^{5}/_{6}$ »	6	$11^{6}/_{7}$
въ среду	$3^{2}/_{3}$ »	3	$46^{7}/_{8}$
въ четвертокъ . . .	$10^{1}/_{2}$ »	9	$54^{2}/_{3}$
въ пятницу	$1^{1}/_{4}$ »	—	$99^{1}/_{2}$

Сколько продано всего фунтовъ и на какую сумму?

13) Сложить: $^{2}/_{3}$ стопы съ $^{3}/_{4}$ дести и $^{7}/_{8}$ листа.

14) Сколько составитъ всего золотниковъ: 3 пуда $^{15}/_{16}$ фунта и $^{2}/_{3}$ золотника?

15) Сколько заключается муки въ 4 мѣшкахъ, когда въ одномъ мѣшкѣ находится 2 пуда $24^{5}/_{6}$ фунта, въ другомъ 3 пуда $9^{3}/_{4}$ фунта, въ третьемъ 2 пуда $18^{5}/_{8}$ ф. и въ четвертомъ 3 пуда $^{7}/_{8}$ фунта?

16) $^{2}/_{3}$ числа 500 сложить съ $^{4}/_{7}$ числа 348.

17) Нѣкто мѣшаетъ $6^3/_4$ фунта воды съ $7^{11}/_{12}$ фунта крѣпкаго уксуса. Сколько фунтовъ составитъ смѣсь?

18) Чему равна сумма трехъ чиселъ, изъ которыхъ одно есть $14^{11}/_{17}$, другое болѣе перваго на $9^{13}/_{20}$, а третье болѣе втораго на $5^2/_7$?

§ 17.

ВЫЧИТАНІЕ ДРОБЕЙ.

И здѣсь, какъ въ предыдущемъ упражненіи, все дѣло состоитъ въ практикѣ.

a) *Вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа.*

$$16 - {}^1/_{17} = ?$$

Рѣшеніе. $16 - {}^1/_{17} = 15\ {}^{17}/_{17} - {}^1/_{17} = 15^{16}/_{17}$.

Вычитаніе дроби изъ дроби.

Найти разность между $^7/_9$ *и* $^5/_8$.

Рѣшеніе. Чтобъ узнать чѣмъ именно одна изъ двухъ данныхъ дробей, имѣющихъ разныхъ знаменателей, болѣе другой, надобно прежде обѣ дроби привести въ одинакія доли, т. е. *къ одинаковому знаменателю*, и потомъ поступать такъ, какъ поступали при вычитаніи дробей съ одинакими знаменателями.

	72	
$^7/_9$	8	56
$^5/_8$	9	45
		$^{11}/_{72}$

Здѣсь все различіе отъ сложенія состоитъ въ томъ, что числитель меньшей изъ преобразованныхъ въ одинаковыя части дробей вычитается изъ числителя большей и подъ полученною разностію подписывается, какъ и въ сложеніи, общій знаменатель.

Тоже другимъ способомъ:

$$^7/_9 - {}^5/_8 = \frac{56 - 45}{72} = {}^{11}/_{72}.$$

Примѣчаніе. Вообще этотъ способъ предпочтительнѣе употреблять тогда, когда знаменатели данныхъ дробей первыя между собою числа.

Если дробь вычитаемаго числа болѣе дроби, находящейся при уменьшаемомъ числѣ, то, чтобъ можно было произвести вычитаніе, необходимо отъ цѣлаго уменьшаемаго числа взять единицу и, обративъ ее въ тѣ же части, что и въ уменьшаемой дроби, присоединить ее къ послѣдней.

1) *Требуется изъ $3^2/_7$ вычесть $1^5/_6$.*

	42	
$3\cdot{}^2/_7$	6	$12 + 42 = 54$
$1^5/_6$	7	35
$1 + {}^{19}/_{42} = 1^{19}/_{42}$		

По приведеніи данныхъ дробей къ одинаковому знаменателю, тотчасъ видимъ, что $^5/_6$ болѣе $^2/_7$, ибо $^5/_6 = {}^{35}/_{42}$, а $^2/_7 = {}^{12}/_{42}$. Слѣдовательно, чтобы можно было произвести вычитаніе, занимаютъ у цѣлаго числа, находящагося въ уменьшаемомъ, единицу (а надъ цѣлымъ числомъ ставятъ точку для показанія, что его должно теперь читать единицею менѣе противъ прежняго), превращаютъ ее въ 42-я доли и прилагаютъ послѣднія къ 12 сорокъ-вторымъ, что и составитъ всего 54 сорокъ-вторыя. Изъ $^{54}/_{42}$ вычитаютъ $^{35}/_{42}$; наконецъ остатокъ отъ дробей соединяютъ съ остаткомъ отъ цѣлыхъ чиселъ и получаютъ всего $1^{19}/_{42}$.

2) *Изъ 5 рублей $41^2/_5$ коп. вычесть 3 рубля $99^{15}/_{16}$ коп.*

Рѣшеніе.

	80	
5 руб. $41^2/_5$ коп.	16	$32 + 80 = 112$
3 » $99^{15}/_{16}$ »	5	75
1 руб. $41^{37}/_{80}$ коп.		$^{37}/_{80}$

3) Какимъ числомъ $^2/_3$ сажени болѣе $^2/_3$ дюйма?

Чтобъ узнать, какимъ числомъ $^2/_3$ сажени болѣе $^2/_3$ дюйма, должно или $^2/_3$ сажени привести въ дюймы, или $^2/_3$ дюйма привести въ сажени, ибо только однородныя мѣры могутъ быть сравниваемы между собою.

$^2/_3$ саж. $= \frac{2 \times 84}{3}$ дюйма $= 2 \times 28$ дюйм. $= 56$ дюйм.; 56 дюйм. болѣе $^2/_3$ дюйма на $55^1/_3$ дюйма.

Сложныя задачи.

4) Какіе получатся остатки, если отъ дроби $^7/_8$ станемъ отнимать $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$ и т. д.?

Отвѣтъ. $^7/_8 - {}^1/_2 = {}^7/_8 - {}^4/_8 = {}^3/_8$;

$$^7/_8 - {}^1/_3 = \frac{21 - 8}{24} = {}^{13}/_{24};$$

$$^7/_8 - {}^1/_4 = {}^7/_8 - {}^2/_8 = {}^5/_8 \text{ и проч.}$$

5) Сложить $146^2/_3 + 487^5/_6 + 342^7/_9 + 1864^7/_{12}$ и изъ этой суммы вычесть слѣдующую сумму: $122^1/_2 + 345^7/_8 + 116^2/_5 + 314^5/_7$.

Выкладка.

	36	
$146^2/_3$	12	24
$487^5/_6$	6	30
$342^7/_9$	4	28
$1864^7/_{12}$	3	21
$2841^{31}/_{36}$		$^{103}/_{36} = 2^{31}/_{36}$

	280	
$122^1/_2$	140	140
$345^7/_8$	35	245
$116^2/_5$	56	112
$314^5/_7$	40	200
$899^{137}/_{280}$		$^{697}/_{280} = 2^{137}/_{280}$

	2520	
$2841^{31}/_{36}$	70	2170
$- 899^{137}/_{280}$	9	1233
$1942^{937}/_{2520}$		$^{937}/_{2520}$.

§ 18.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) $6^5/_6 - 3 = ?$

2) $24^4/_5$ лота безъ 9 лотовъ = ?

3) Изъ $^{11}/_{12}$ вычесть $^3/_4$.

4) $^2/_3$ пуда — $^5/_8$ пуда = ?

5) Можно ли изъ $^3/_4$ вычесть $^8/_9$? — если нѣтъ, то почему? — Сколько надобно прибавить къ меньшей дроби, чтобы по вычитаніи ея изъ другой, ничего не вышло въ остаткѣ?

6) $^7/_{10}$ линіи — $^1/_3$ линіи?

7) 22 руб. $17^3/_4$ коп. безъ 15 руб. $89^1/_9$ коп. = ?

8) 12 четвертей $6^7/_8$ четверика — $7^5/_6$ четверика = ?

9) Изъ $^{19}/_{20}$ вычесть сперва $^2/_7$, а потомъ изъ остатка вычесть $^3/_{11}$.

10) Нѣкто изъ $6^1/_4$ р. издержалъ $2^5/_8$ р. Сколько у него осталось?

11) $27^3/_{10} - 15^{17}/_{18} = ?$

12) $7^2/_3$ руб. — $4^5/_7$ руб. = ?

13)
	четвертей	четверик.	гарнц.
	8	7	$5^4/_{11}$
—	5	6	$7^5/_6$

14) Отъ $^1/_4$ пуда отнять $9^5/_9$ фунта.

15) 9 руб. — $^2/_3$ руб. = ?

16) 16 лотовъ — $7^7/_{13}$ лот. = ?

17) Въ приходѣ состояло 728 рублей: изъ этой суммы издержано сперва $235^2/_3$ руб., а потомъ еще $109^3/_4$ руб. Сколько въ остаткѣ?

18) Чѣмъ $^5/_8$ часа болѣе $^6/_7$ минуты?

19) Чѣмъ пятая часть $^7/_9$ менѣе $^2/_3$ числа 15?

20) Если отъ $^2/_3$ числа 40 отнять $^{10}/_{11}$ числа 13, то что останется?

21) Отъ одного пуда сахару взято сперва $13^3/_4$ фунта, а потомъ $9^5/_6$ фунта. Сколько остается?

22) Какую дробь надобно прибавить къ $^4/_7$, чтобы вышла дробь $^{11}/_{12}$?

23) Отъ 7 цѣлыхъ отнять столько, сколько составляетъ разность между $^5/_9$ и $^2/_7$.

24)

Приходъ:	Расходъ:
$216^3/_4$ руб.	$147^5/_6$ руб.
$710^7/_8$ »	$429^3/_{17}$ »
$816^2/_3$ »	$610^5/_9$ »

Что въ остаткѣ?

25) $1^2/_3 - {}^4/_5 = ?$

26) $3^1/_5 - 1^8/_9 = ?$

27) $4^4/_7 - 2^5/_{11} = ?$

28) $3^1/_3 - 2^7/_{10} = ?$

29) $3^4/_{15} - 1^9/_{11} = ?$

30) $3^3/_1 - 2^4/_{13} = ?$

§ 19.

УМНОЖЕНІЕ ДРОБЕЙ.

Прежде было уже объяснено (см. § 10) какъ должно читать выраженія, подобныя слѣдующимъ:

$7 \times {}^2/_3$ (т. е. семь разъ взятыя двѣ трети)

$^5/_{11} \times 9$ (т. е. пять одиннадцатыхъ долей числа 9)

$^2/_3 \times {}^8/_9$ (т. е. двѣ трети осьми девятыхъ) и т. д.;

остается вывести общія правила, которыми обыкновенно руководствуются при умноженіи дробей.

а) Если цѣлое число помножается на дробь, то числитель данной дроби берется столько разъ, сколько единицъ въ цѣломъ, и подъ произведеніемъ подписывается знаменатель той же дроби.

Примѣръ. $27 \times {}^{16}/_{19} = ?$

Рѣшеніе. $27 \times {}^{16}/_{19} = \frac{27 \times 16}{19} = \frac{432}{19} = 22^{14}/_{19}$.

Ибо 27 умножить на $^{16}/_{19}$ тоже значитъ, что дробь $^{16}/_{19}$ увеличить въ 27 разъ, а дробь увеличивается въ 27 тогда, когда, при томъ же знаменателѣ, числитель ея увеличится въ 27 разъ.

б) Чтобы цѣлое число умножить на смѣшанное, надобно сперва привести послѣднее въ дробь и потомъ поступать такъ, какъ показано въ *а*.

Или: цѣлое умножить на цѣлое, потомъ дробь на цѣлое и оба произведенія сложить. Тоже и обратно, когда смѣшанное число умножается на цѣлое.

Примѣръ. Чему равно $215^{17}/_{24} \times 146$?

Рѣш. $215\frac{17}{24} \times 146 = \frac{5177}{24} \times 146 = \frac{755842}{24} = 31493\frac{5}{12}$.

Второе рѣшеніе.

$$215\frac{17}{24} \times 146 = 215 \times 146 + \frac{17}{24} \times 146 = 31390 + 103\frac{10}{24} = 31493\frac{5}{12}.$$

в) При умноженіи дроби на дробь, произведеніе изъ числителей дѣлится на произведеніе изъ знаменателей. Если въ частномъ получится дробь, превышающая одну или нѣсколько единицъ, то цѣлое число изъ нея извлекается.

Дѣйствительно, что значитъ, напримѣръ, $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$? — Это значитъ взять 5 разъ седьмую долю отъ дроби $\frac{2}{3}$; но $\frac{1}{7}$ отъ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3 \times 7}$; ибо, чтобъ получить $\frac{1}{7}$ дроби $\frac{2}{3}$, должно послѣднюю уменьшить въ 7 разъ, или все тоже, умножить знаменателя ея на 7. Если $\frac{1}{7}$ дроби $\frac{2}{3} = \frac{2}{3 \times 7}$, то $\frac{5}{7}$ дроби $\frac{2}{3}$ должны быть въ 5 разъ болѣе выраженія $\frac{2}{3 \times 7}$, а именно: $\frac{5 \times 2}{7 \times 3}$, т. е. $\frac{10}{21}$. Отсюда и слѣдуетъ, что *при умноженіи дроби на дробь, произведеніе изъ ихъ числителей дѣлится на произведеніе изъ ихъ знаменателей.*

г) При умноженіи смѣшаннаго числа на смѣшанное, оба числа приводятся сперва въ дроби, а потомъ поступаютъ такъ, какъ показано въ *в*.

Примѣръ. Сколько составитъ $75\frac{7}{12} \times 4\frac{11}{25}$.

Исчисленіе.

$$75\frac{7}{12} \times 4\frac{11}{25} = \frac{907}{12} \times \frac{111}{25} = \frac{907 \times 111}{12 \times 25} = \frac{100677}{300} = 335\frac{177}{300}$$

т. е.

1) $75\frac{7}{12} = \frac{907}{12}$;

```
 × 12
 -----
  150
  75
 -----
  900
 + 7
 -----
  907
```

2) $4\frac{11}{25} = \frac{111}{25}$;

```
 × 25
 -----
  100
 + 11
 -----
  111
```

3)
```
  907
×111
-----
  907
 907
907
------
100677
```

4)
```
 12
×25
---
300
```

5) $1006{,}77 : 3{,}00 = 335\frac{177}{300}$
```
10
 16
  177
```

Примѣръ изъ именовинныхъ чиселъ.

Умножить 5 саженъ 2 фута $11^3/_4$ дюйма на $5^3/_4$.

Приведя множителя $5^3/_4$ въ одну дробь, увидимъ, что умножить данное именованное число на $5^3/_4$ тоже значитъ, что увеличить его сперва въ 23 раза, а потомъ уменьшить въ 4 раза.

Выкладка.

$5^3/_4 = {}^{23}/_4$; $11^3/_4 = {}^{47}/_4$.

5 саженъ 2 фута $11^3/_4$ дюйма
×23

115 саж. 46 фут. $\frac{1081}{4}$ дюйма : 4 = 28 саж. + 16 ф. + $76^9/_{16}$ д. = = 31 саж. 1 ф. $4^9/_{16}$ дюйм.

```
 35
----
  3 саж.
×7
----
 21 ф.
+46
----
 67 ф.
----
  3 ф.
×12
----
 36 д.
```

36 д. = ${}^{144}/_4$ д.; ${}^{144}/_4 + {}^{1081}/_4 = {}^{1225}/_4$; ${}^{1225}/_4 : 4 = {}^{1225}/_{16} = 76^9/_{16}$.

§ 20.

РАЗЛИЧНЫЯ СОКРАЩЕНІЯ ПРИ УМНОЖЕНІИ ДРОБЕЙ.

Умноженіе дробей допускаетъ многія сокращенія, которыхъ при самомъ дѣйствіи никогда не должно выпускать изъ виду.

Примѣръ 1. Чему $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{9} \times \frac{4}{5}$?

Отв. $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5}$. Здѣсь замѣчаемъ, что какъ въ произведеніе знаменателей, такъ и въ произведеніе числителей входятъ одинаковые множители, а именно: 5, 3, 4; потому что множителя 9 въ произведеніи знаменателей можно выразить такъ: 3×3. Исключеніемъ общихъ множителей изъ обоихъ произведеній нисколько не измѣнимъ отношенія между членами искомой дроби, потому что это сокращеніе уменьшитъ ихъ въ одинаковое число разъ, отъ чего, какъ извѣстно, дробь своего значенія не перемѣняетъ. Итакъ, вмѣсто выраженія: $\frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5}$ можно взять выраженіе: $\frac{7}{8 \times 3}$, которое равно $\frac{7}{24}$.

Примѣръ 2. Найти произведеніе слѣдующихъ чиселъ: $\frac{5}{6}$, $3\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, 6, $2\frac{5}{8}$.

Рѣшеніе. $\frac{5}{6} \times 3\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 6 \times 2\frac{5}{8} = \frac{5 \times 19 \times 2 \times 6 \times 21}{6 \times 5 \times 3 \times 8} = \frac{19 \times 7}{4} = \frac{133}{4} = 33\frac{1}{4}$.

Здѣсь общіе множители суть: 5, 2, 6, 3; ибо множитель 21, входящій въ произведеніе числителей, и множитель 8, входящій въ произведеніе знаменателей, могутъ быть разложены: первый на 7×3, а второй на 4×2.

Примѣръ 3. Что получится, если $\frac{24}{25}$ умножить на 15?

Рѣш. $\frac{24}{25} \times 15 = \frac{24 \times 15}{25} = \frac{24 \times 3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{24 \times 3}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$.

Примѣръ 4. Чему $= 6\frac{4}{5} \times 15$?

Рѣшеніе. $6\frac{4}{5} \times 15 = \frac{34 \times 15}{5} = \frac{34 \times 3 \times 5}{5} = 34 \times 3 = 102$.

§ 21.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Если лотъ нѣкотораго товара стоитъ $\frac{2}{3}$ гроша, то что стоютъ 9 лотовъ?

2) $^{7}/_{10} \times 9 = ?$ 3) $^{5}/_{8} \times 32 = ?$

4) Каждый изъ семи человѣкъ долженъ получить по 9 пудовъ $8^{3}/_{4}$ фунта муки. Сколько получатъ муки всѣ вмѣстѣ?

5) 5 четвертей 7 четверик. $2^{3}/_{7}$ гарн. $\times 16 = ?$

6) Сколько содержатъ въ себѣ 23 мѣшка съ хлѣбомъ, когда въ каждомъ по 2 пуда $17^{5}/_{11}$ фунта?

7) Нѣкто купилъ 11 аршинъ холста, заплативъ за каждый аршинъ по $^{7}/_{10}$ рубля; сколько онъ заплатилъ за весь холстъ?

8) $37 \times {^{5}/_{6}} = ?$

9) Нѣкто долженъ отдать изъ 1273 руб. 48 копѣекъ $^{2}/_{3}$ доли. Сколько онъ долженъ отдать?

10) Если аршинъ холста стоитъ $^{5}/_{12}$ руб., то что должно заплатить за $^{5}/_{6}$ аршина?

11) $^{4}/_{5} \times {^{2}/_{3}} = ?$ 12) $^{3}/_{7} \times {^{11}/_{12}} = ?$

13) Какая получится дробь, если отъ $^{7}/_{9}$ взять 4 раза пятую часть?

14) 28 фунтовъ $15^{9}/_{16}$ лота $\times {^{5}/_{7}} = ?$

15) Найти произведеніе дробей: $^{4}/_{11}$ и $^{3}/_{5}$.

16) Изъ двухъ множителей одинъ равенъ $^{7}/_{17}$, а другой $^{4}/_{5}$; чему равно произведеніе?

17) Найти двѣ такія дроби, изъ которыхъ первая составляла бы отъ второй восемь десятыхъ.

18) $5^{3}/_{4} \times {^{7}/_{9}} = ?$ 19) $1081 \times {^{3}/_{7}} \times {^{2}/_{3}} = ?$

20) $1^{3}/_{7} \times 3^{1}/_{7} = ?$ 21) $1^{1}/_{9} \times 2^{6}/_{7} = ?$

22) $1^{4}/_{5} \times 2^{5}/_{6} = ?$ 23) $2^{1}/_{4} \times 3^{1}/_{3} = ?$

24) $9^{1}/_{9} \times 9^{1}/_{9} = ?$ 25) $^{18}/_{7} \times {^{10}/_{4}} = ?$

26) 23 стопы 18 дестей $9^{3}/_{4}$ листа $\times 4^{7}/_{11} = ?$

27) Найти произведеніе слѣдующихъ трехъ дробей: $^{11}/_{13}$, $^{8}/_{9}$, $^{7}/_{8}$.

28) Найти три числа, изъ которыхъ первое было бы болѣе втораго въ $4^{3}/_{4}$ раза, а второе болѣе третьяго въ $8^{10}/_{11}$ раза.

29) Ласточки столь быстро летаютъ, что одну нѣмецкую милю пролетаютъ не болѣе какъ въ 2 минуты $37^{3}/_{5}$ секунды. Во сколько времени ласточка можетъ пролетѣть изъ Петербурга въ Гатчину, если разстояніе между этими городами около 6 нѣмецкихъ миль?

30) Одинъ крестьянинъ посѣялъ на своей полосѣ 3 четверти 5 четвериковъ $3^{3}/_{4}$ гарнцовъ ржи; но $^{2}/_{3}$ его полосы совершенно побило градомъ. Сколько онъ соберетъ съ этой полосы хлѣба при урожаѣ противъ посѣва въ $4^{1}/_{2}$ раза?

§ 22.

ДѢЛЕНІЕ ДРОБЕЙ.

Примѣчаніе. Дѣленіе дробей, по-крайней-мѣрѣ для учащихся не старѣе двѣнадцати лѣтъ, представляетъ не мало затрудненій, зависящихъ въ особенности отъ формы, подъ которою его обыкновенно представляютъ, и потому постараемся подробнѣе изложить это дѣйствіе.

I. *Дѣленіе дроби и смѣшаннаго числа на цѣлое число.*

1) Если 4 учащимся раздѣлить поровно $^1/_2$ рубля, то по сколько каждому достанется?

Отв. По $^1/_8$ рубля; ибо чтобъ узнать, по сколько получитъ каждый, надобно $^1/_2$ раздѣлить на 4, или, все тоже, уменьшить $^1/_2$ въ 4 раза; но дробь уменьшится въ 4 раза, когда, при томъ же числителѣ, знаменатель ея увеличится въ 4 раза.

Письменно такъ $^1/_2 : 4 = \frac{1}{2 \times 4} = ^1/_8$.

2) По сколько получитъ каждый изъ 5 учащихся, если на всѣхъ раздѣлить по равной части $^7/_8$ рубля?

Отв. По $^7/_{40}$ рубля; ибо $^7/_8 : 5 = \frac{7}{8 \times 5} = ^7/_{40}$.

3) $3^2/_3 : 7 = ?$

Отв. $^{11}/_{21}$. Раздѣлить $3^2/_3$ на 7 тоже значитъ, что уменьшить число $3^2/_3$ въ 7 разъ; но $3^2/_3 = ^{11}/_3$; $^1/_3$, уменьшенная въ 7 разъ $= ^1/_{21}$; а $^{11}/_3$, уменьшенныя въ 7 разъ $= ^{11}/_{21}$.

Этотъ вопросъ можно рѣшить еще слѣдующимъ образомъ: такъ какъ дѣлимое $3^2/_3$ менѣе дѣлителя 7, то раздѣлить $3^2/_3$ на 7 тоже, что узнать, какую часть $3^2/_3$ составляютъ отъ 7. Но если 1 составляетъ $^1/_7$ отъ 7, то $^1/_3$, будучи втрое менѣе 1, должна составлять $^1/_{21}$ отъ 7; поэтому, $^{11}/_3$, или $3^2/_3$, въ 11 разъ болѣе $^1/_{21}$, т. е. $^{11}/_{21}$.

Здѣсь полезно упражняться въ рѣшеніи послѣдовательныхъ рядовъ; напр.

а) Раздѣлить $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$ и т. д. на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и т. д.

б) Найти $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$ и т. д. отъ $^2/_3$, $^3/_7$, $^3/_9$ и т. д.

в) Опредѣлить $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ и т. д. отъ $2^1/_2$, $3^1/_2$, $4^1/_2$, $5^1/_2$ и т. д.

Изъ приведенныхъ примѣровъ выводимъ правило: *чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, надобно знаменателя ея умножить на это число.*

При дѣленіи смѣшаннаго числа на цѣлое наблюдается тоже самое, только сперва смѣшанное число приводится въ одну дробь.

II. *Дѣленіе цѣлаго числа на дробь или смѣшанное число.*

1) Сколько разъ $^2/_3$ содержится въ 4?

Отв. 6 разъ. Чтобъ узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержится въ 4, надобно 4 также привести въ третьи доли; $4 = ^{12}/_3$. Итакъ $^2/_3$ содержится въ 4 столько же разъ, сколько $^2/_3$ въ $^{12}/_3$; но $^2/_3$ содержатся въ $^{12}/_3$ столько же разъ, сколько 2 (числитель дѣлящей дроби) въ 12 (числителѣ дѣлимой дроби), т. е. 6 разъ. Письменно такъ: $4 : {^2/_3} = {^{12}/_3} : {^2/_3} = {^{12}/_2} = 6$.

2) $12 : {^5/_7} = ?$

Отв. $^{84}/_5$, или $16^4/_5$. Ибо $12 = \frac{12 \times 7}{7} = {^{84}/_7}$; ${^{84}/_7} : {^5/_7} = 84 : 5 = {^{84}/_5} = 16^4/_5$.

3) Найти, сколько разъ $3^3/_4$ содержатся въ 18.

Отв. ${^{72}/_{15}} = 4^{12}/_{15}$; потому что $18 = \frac{18 \times 4}{4} = {^{72}/_4}$; $3^3/_4 = {^{15}/_4}$.

Итакъ, чтобъ узнать, сколько разъ $3^3/_4$ содержатся въ 18, надобно $^{72}/_4$ раздѣлить на $^{15}/_4$, или все тоже, что 72 раздѣлить на 15.

Вотъ общее правило: *цѣлое число приводится въ однородныя части съ дробью, послѣ чего числитель дѣлимой дроби раздѣляется на числителя дѣлящей.* Если же дѣлитель есть смѣшанное число, то прежде надобно привести его въ одну дробь, а потомъ поступать, какъ сказано.

III. *Дѣленіе дроби на дробь, также смѣшаннаго числа на дробь или обратно.*

1) Сколько разъ $^1/_3$ содержится въ $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^2/_5$?

Отв. ${^1/_3} = {^2/_6}$; ${^1/_2} = {^3/_6}$; 2 въ 3 содержится $1^1/_2$ раза; поэтому и $^2/_6$ въ $^3/_6$, или $^1/_3$ въ $^1/_2$ тоже содержится $1^1/_2$ раза.

Сколько разъ $^2/_3$ содержится въ $^3/_4$?

${^2/_3} = {^8/_{12}}$; ${^3/_4} = {^9/_{12}}$; 8 въ 9 содержится $1^1/_8$ раза; слѣдовательно и $^8/_{12}$ въ $^9/_{12}$, или $^2/_3$ въ $^3/_4$ тоже $1^1/_8$ раза.

2) Сколько разъ $^2/_3$ содержится въ $5^1/_2$?

Отвѣтъ. $8^1/_4$; ибо ${^2/_3} = {^4/_6}$; $5^1/_2 = {^{11}/_2} = {^{33}/_6}$, 4 въ 33 содержится $8^1/_4$ раза, слѣдовательно и $^4/_6$ въ $^{33}/_6$, или $^2/_3$ въ $5^1/_2$ тоже $8^1/_4$ раза. Письменно такъ:

$$5^1/_2 : {^2/_3} = {^{11}/_2} : {^2/_3} = \frac{11 \times 3}{6} : \frac{2 \times 2}{6} = \frac{11 \times 3}{2 \times 2} = {^{33}/_4} = 8^1/_4.$$

3) Раздѣлить $^2/_3$ на $5^1/_2$.

Такъ какъ дѣлимое менѣе дѣлителя, то въ частномъ должна быть дробь: $^2/_3$ раздѣлить на $5^1/_2$ все тоже, что узнать, какую часть $^2/_3$

составляютъ отъ $5^1/_2$. Для этого приводимъ обѣ дроби въ одинаковыя части. $^2/_3 = {^4/_6}$, $5^1/_2 = {^{33}/_6}$; 4 отъ 33 составляютъ $^4/_{33}$; поэтому и $^2/_3$ отъ $5^1/_2$ тоже $^4/_{33}$. Письменно:

$$^2/_3 : 5^1/_2 = \frac{2 \times 2}{6} : \frac{11 \times 3}{6} = \frac{2 \times 2}{11 \times 3} = {^4/_{33}}.$$

Общее правило. При раздѣленіи дроби на дробь поступаютъ такъ: *сперва приводятъ обѣ дроби въ однородныя части* (къ одинаковому знаменателю), *а потомъ числителя дѣлимой дроби дѣлятъ на числителя дѣлящей,* — *чрезъ что и получаютъ искомое частное. Если дѣлимое или дѣлитель* (или оба вмѣстѣ), *состоятъ изъ смѣшаннаго числа, то прежде всего смѣшанное число приводится въ одну дробь.*

4) Сколько разъ $^{21}/_{40}$ содержится въ $^{87}/_{91}$?

Рѣш. $^{87}/_{91} : {^{21}/_{40}} = \frac{87 \times 40}{91 \times 40} : \frac{21 \times 91}{40 \times 91} = \frac{87 \times 40}{21 \times 91} = \frac{3 \times 29 \times 40}{3 \times 7 \times 91}$

$= \frac{29 \times 40}{7 \times 91} = {^{1160}/_{637}} = 1^{523}/_{637}$.

Примѣчаніе. Здѣсь, при приведеніи дробей къ одинаковому знаменателю, всѣ произведенія изображаются только въ своихъ множителяхъ, для той цѣли, чтобы при окончательномъ результатѣ тотчасъ можно было видѣть, на какія именно числа сокращается частное, и этимъ сокращеніемъ непремѣнно воспользоваться.

5) Раздѣлить $^{18}/_{25}$ на $^{14}/_{63}$.

Рѣш. $^{18}/_{25} : {^{14}/_{63}} = \frac{18 \,.\, 63}{25 \,.\, 63} : \frac{14 \,.\, 25}{63 \,.\, 25} = \frac{18 \,.\, 63}{14 \,.\, 25} = \frac{2 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 9}{2 \,.\, 7 \,.\, 25}$

$= \frac{9 \,.\, 9}{25} = {^{81}/_{25}} = 3^6/_{25}$.

6) Что получится въ частномъ, если $7^7/_9$ раздѣлить на $3^2/_{11}$?

Рѣш. $7^7/_9 : 3^2/_{11} = {^{70}/_9} : {^{35}/_{11}} = \frac{70 \times 11}{9 \times 11} : \frac{35 \times 9}{11 \times 9} = \frac{70 \times 11}{35 \times 9}$

$= \frac{2 \times 35 \times 11}{35 \times 9} = \frac{2 \times 11}{9} = {^{22}/_9} = {^4/_9}$.

Примѣчаніе. Изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ видно, сколько сокращаются выкладки оттого, что произведенія только обозначаются въ своихъ множителяхъ, а не получаются на самомъ дѣлѣ.

Дробь $\frac{70 \times 11}{35 \times 9}$, полученная въ частномъ изъ послѣдняго примѣра, состоитъ изъ двухъ произведеній, изъ которыхъ верхнее равно числителю дѣлимой дроби, умноженному на знаменателя дѣлящей, а нижнее — знаменателю дѣлимой дроби, умноженному на числителя

дѣлящей. Такимъ образомъ выводимъ краткое правило для дѣленія дробей, а именно: *чтобы раздѣлить одну дробь на другую, для этого стоитъ только первую умножить на обращенную вторую.* Такъ напримѣръ:

$$^{70}/_9 : (^{35}/_{11}) = {^{70}/_9} \times {^{11}/_{35}} = \frac{70 \times 11}{9 \times 35} = 2^4/_9.$$

Примѣчаніе. Дробь $^{35}/_{11}$, заключенная въ скобкахъ, показываетъ, что вмѣсто нея надобно взять $^{11}/_{35}$, т. е. ту же дробь, только въ обратномъ видѣ (знаменателя вмѣсто числителя, а числителя вмѣсто знаменателя), и въ такомъ случаѣ дѣленіе замѣняется умноженіемъ.

Различныя способы рѣшенія одной и той же задачи.

1) $23 : {^4/_5} = 28^3/_4$.

a) $23 = {^{115}/_5}$; $^4/_5$ въ $^{115}/_5$ тоже, что 4 въ 115, или $^{115}/_4$, или $28^3/_4$.

b) $23 : 1 = 23$; $23 : {^1/_5} = 23 \times 5 = 115$; $^{115}/_4 = 28^3/_4$. Если 1 въ 23 содержится 23 раза, то $^1/_5$, будучи въ 5 разъ менѣе 1, должна въ числѣ 23 содержаться въ пять разъ болѣе 23, или 115. Но какъ требуется раздѣлить не на $^1/_5$, а на $^4/_5$, т. е. на дѣлителя вчетверо большаго $^1/_5$, то для частнаго должно взять число вчетверо менѣе 115, т. е. $^{115}/_4$ или $28^3/_4$.

c) $23 : 4 = 5^3/_4$. Такъ какъ здѣсь взятъ дѣлитель въ пять разъ болѣе даннаго ($^3/_5$), то и частное $5^3/_4$ должно быть увеличено въ пять разъ; $5^3/_4 \times 5 = 25^{15}/_4 = 28^3/_4$.

d) $23 = 24 - 1$; $24 : {^4/_5} = 5 \times 6 = 30$.

Но здѣсь дѣлимое взято единицею болѣе настоящаго, въ которой дѣлитель $^3/_5$ содержится $1^1/_4$ раза (ибо $1 : {^4/_5} = {^5/_4} = 1^1/_4$); поэтому, для полученія искомаго частнаго, надобно изъ 30 вычесть $1^1/_4$, что и дастъ $28^3/_4$.

e) $23 = 20 + 3$; $20 : {^4/_5} = 5 \times 5 = 25$; $3 : {^4/_5} = {^{15}/_4} = 3^3/_4$; $25 + 3^3/_4 = 28^3/_4$.

f) $23 : {^4/_5} =$ четвертой части 23-хъ, взятой 5 разъ, что равно $5 \times 5^3/_4$ или $28^3/_4$.

g) $23 = 23 \times 1$; $1 : {^4/_5} = {^5/_4}$; $23 \times {^5/_4} = {^{115}/_4} = 28^3/_4$.

Примѣчаніе. Сколь важны для развитія соображеній такія различныя точки зрѣнія при рѣшеніи задачъ, въ томъ, кажется, послѣ приведенныхъ нами примѣровъ, нельзя сомнѣваться.

Примѣры дѣленія именованныхъ чиселъ.

Чтобы раздѣлить именованное число на дробь, гораздо проще умножить сперва это число на знаменателя дроби, и полученное

чрезъ то произведеніе раздѣлить на числителя; ибо мы уже знаемъ, что раздѣлить какое-либо число на дробь все тоже, что умножить его на обращенную дробь. При именованныхъ числахъ потому удобнѣе употреблять этотъ способъ дѣленія, что чрезъ него мы приходимъ къ дѣйствію надъ цѣлыми числами.

Примѣръ. Раздѣлить 5 часовъ 40 минутъ 16 секундъ на $^3/_4$.

Рѣшеніе.

а) 5 часовъ 40 минутъ 16 секундъ
$\times$ 4

22 часа 41 минута 4 секунды.

б) 22 часа 41 минута 4 секунды : $3 = 7$ ч. 33 м. $41^1/_3$ с.
21

1 часъ
$\times$ 60

60 мин.
+ 41

101 мин.
11

2 мин.
$\times$ 60

120 сек.
+ 4

124

Примѣръ болѣе сложный.

Раздѣлить 7 верстъ 115 саж. $9^5/_{12}$ ф. на $5^6/_7$.

Рѣшеніе.

$5^6/_7 = {^{41}/_7}$. Итакъ данное именованное число сперва умножимъ на 7, а потомъ произведеніе раздѣлимъ на 41.

а) 7 верстъ 115 саж. $9^5/_{12}$ ф.
$\times$ 7

50 верстъ 314 саж. $2^{11}/_{12}$ ф. ($7 \times 9^5/_{12} = 63^{35}/_{12} = 65^{11}/_{12}$).

Отъ умноженія футовъ получимъ $65^{11}/_{12}$ фут., что составляетъ 9 саженъ и $2^{11}/_{12}$ футовъ; отъ умноженія саженъ—814 с., что равно 1 верстѣ 314 саж.

б) 50 вер. 314 с. $2^{11}/_{12}$ ф. : $41 = 1$ вер. 117 с. $2^{479}/_{492}$ ф.

41	
9 вер.	
$\times$ 500	
4500 саж.	
+ 314	
4814	
71	$121^{11}/_{12} : 41 = {}^{1463}/_{12} : 41 = \frac{1463}{41 \times 12} =$
304	$= {}^{1463}/_{492} = 2^{479}/_{492}$.
17 саж.	
$\times$ 7	
119 ф.	
+ $2^{11}/_{12}$	
$121^{11}/_{12}$	

§ 23.

РѢШЕНІЕ НѢСКОЛЬКИХЪ БОЛѢЕ ТРУДНЫХЪ ЗАДАЧЪ, ВСТРѢЧАЮЩИХСЯ ВЪ ДѢЛЕНІИ ДРОБЕЙ.

1) *Какое число, будучи раздѣлено на $^2/_3$, увеличится на 6 единицъ?*

Если 1, раздѣленная на $^2/_3$, даетъ въ частномъ число, которое въ полтора раза болѣе дѣлимаго ($1 : {}^2/_3 = 1^1/_2$), то и всякое число, будучи раздѣлено на $^2/_3$, увеличится въ $1^1/_2$ раза. Но, по условію задачи, искомое число, чрезъ раздѣленіе его на $^2/_3$, должно увеличиться на 6 единицъ; поэтому 6 единицъ составляютъ половину искомаго числа, которое равно 12.

Какое число увеличится на 9 чрезъ раздѣленіе его на $^3/_4$?

Число 27; потому что если $1 : {}^3/_4 = 1^1/_3$, то и всякое число чрезъ раздѣленіе на $^3/_4$ увеличивается на *одну треть* его; а какъ, по условію задачи, искомое число увеличилось на 9 единицъ, значитъ 9 составляетъ *треть* искомаго, которое поэтому равно 27.

3) *На какое число должно раздѣлить 8, чтобы получить въ частномъ 10?*

На $^4/_5$; ибо если число 10 частное, а 8 дѣлимое, то дѣлитель долженъ быть равенъ дѣлимому, раздѣленному на частное; т. е. $8 : 10 = {}^8/_{10} = {}^4/_5$. Дѣйствительно $8 : {}^4/_5 = 40 : 4 = 10$.

4) *Въ какомъ числѣ $^1/_3$ содержится $^3/_4$ раза?*

Въ 1. Дробь, въ которой $^1/_3$ содержится $^1/_4$ раза есть $^1/_{12}$; дробь, въ которой $^1/_3$ содержится $^3/_4$ раза, втрое больше $^1/_{12}$, т. е. $^3/_{12}$; слѣдо-

вательно число, въ которомъ $^4/_3$ содержится $^3/_4$ раза, должно быть въ 4 раза болѣе $^3/_{12}$; т. е. $4 \times {}^3/_{12} = {}^{12}/_{12} = 1$.

5) *Какое число должно раздѣлить на $^1/_3$, чтобы получить 7?*

$2^1/_3$. Найти число, которое будучи раздѣлено на $^1/_3$, дастъ 7, значитъ тоже, что найти въ какомъ числѣ $^1/_3$ содержится 7 разъ. Если $^1/_3$ въ исковомъ числѣ содержится 7 разъ, то искомое число должно быть въ 7 разъ болѣе $^1/_3$; т. е. $^7/_3$ или $2^1/_3$. Повѣрка: $2^1/_3 : {}^1/_3 = {}^7/_3 : {}^1/_3 = 7$.

§ 24.

СРАВНЕНІЕ ВЫВОДОВЪ, ПОЛУЧАЕМЫХЪ ОТЪ УМНОЖЕНІЯ И ДѢЛЕНІЯ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЕЛЪ И ОТЪ УМНОЖЕНІЯ И ДѢЛЕНІЯ ДРОБНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Произведеніе, получаемое отъ умноженія цѣлыхъ чисѐлъ одного на другое, всегда во столько разъ болѣе множимаго, сколько въ множителѣ заключается единицъ; частное же, получаемое отъ раздѣленія цѣлыхъ чиселъ, всегда менѣе дѣлимаго во столько разъ сколько въ дѣлителѣ содержится единицъ; не то происходитъ отъ умноженія и дѣленія дробей. Сравнимъ результаты, полученные отъ умноженія и дѣленія дробей въ слѣдующихъ примѣрахъ.

Умноженіе.	Дѣленіе.
1) $5 \times {}^3/_4 = 3^3/_4$ ($3^3/_4$ менѣе 5)	1) $5 : {}^3/_4 = 6^2/_3$ ($6^2/_3$ болѣе 5)
2) $7^1/_6 \times {}^2/_3 = 4^7/_9$ ($4^7/_9$ м. $7^1/_6$)	2) $7^1/_6 : {}^2/_3 = 10^3/_4$ ($10^3/_4$ б. $7^1/_6$)
3) $^2/_3 \times {}^4/_5 = {}^8/_{15}$ ($^8/_{15}$ м. $^2/_3$)	3) $^2/_3 : {}^4/_5 = {}^5/_6$ ($^5/_6$ болѣе $^4/_5$).

Эти примѣры показываютъ, что отъ умноженія чиселъ на дроби мѐньшія единицы, получаются въ произведеніи числа *менѣе* множимыхъ, а отъ раздѣленія чиселъ на дроби мѐньшія единицы, получаются въ частномъ числа, которыя *болѣе* дѣлимыхъ; т. е. получаются выводы обратные тѣмъ, которые происходятъ отъ умноженія и дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Слѣдовательно, чтобы правило умноженія имѣло мѣсто какъ при цѣлыхъ, такъ и дробныхъ числахъ, его надобно выразить такъ: *умноженіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по двумъ числамъ* (множимому и множителю) *находятъ третье, составляемое изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы.*

Подъ это опредѣленіе равно подходятъ и умноженіе цѣлыхъ чиселъ и умноженіе дробей. Умножить, напримѣръ, 7 на 5 значитъ найти третье число, которое бы было такъ составлено изъ 7, какъ 5 изъ 1; но 5 составлено изъ пятикратнаго повторенія единицы, значитъ и 7 должно повторить 5 разъ, чтобы получить третье число.

Умножить $^2/_5$ на $^3/_4$ значитъ найти третье число, которое было бы такъ составлено изъ $^2/_5$, какъ $^3/_4$ составлено изъ 1; но $^3/_4$ составляютъ *три четвертыя части единицы*, значитъ и дроби $^2/_5$ надо взять три четвертыя доли, чтобы получить третье число. Это послѣднее очевидно будетъ менѣе $^2/_5$, ибо этого числа берутся только *двѣ трети*.

Что же касается до дѣленія, то опредѣленіе его, приведенное прежде, остается тоже и для дробей.

§ 25.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Сколько разъ 4 содержится въ $^{28}/_{31}$?

2) $^{48}/_{59}$: 6 = ? 3) $^{108}/_{137}$: 9 = ?

4) $^{64}/_{73}$: 6 = ? 5) $^{42}/_{43}$: 7 = ?

6) 25 пудовъ 17$^{35}/_{49}$ фунта : 7 = ?

7) Если за 12 фунтовъ говядины заплачено 2 руб. 25$^3/_4$ коп., то что заплачено за каждый фунтъ?

8) $^{63}/_{79}$ часа : 22 = ? 9) $^{48}/_{121}$ берк. : 39 = ?

10) На $^2/_3$ рубля куплено 6 аршинъ лентъ; что стóитъ аршинъ?

11) Что должно заплатить за одинъ лотъ нѣкотораго товару, котораго $^5/_8$ лота стóютъ 12 рублей?

12) На долю Андрея получено $^2/_3$ заколотаго быка, и онъ получилъ съ своей части 4 пуда 17 фунтовъ говядины. Сколько получено говядины со всего быка?

13) По завѣщанію своего брата, Петръ долженъ былъ получить $^{10}/_{11}$ изъ всего оставшагося послѣ него капитала, и онъ получилъ 11644 рубля. Какъ былъ великъ весь капиталъ?

14) $^3/_8$ фунта нѣкотораго товару стóютъ $^5/_6$ рубля; сколько можно купить этого товару на 1 рубль?

15) $^6/_{11}$: $^2/_7$ = ? 16) $^{13}/_{32}$: $^5/_{12}$ = ?

17) $^4/_5$: $^7/_8$ = ? 18) $^3/_8$: $^{10}/_{11}$ = ?

19 6$^4/_9$: $^5/_8$ = ? 20) $^3/_5$ пуда : 2$^2/_9$ = ?

21) Сколько разъ число 23$^3/_5$ содержится въ 500$^3/_4$?

22) Изъ двухъ чиселъ первое равно 5$^{11}/_{12}$, а другое въ 7$^{13}/_{14}$ раза менѣе его. Чему равно второе?

23) На 6$^3/_{10}$ десятины высѣяно 7 четвертей 5 четвериковъ 3$^5/_8$ гарнца ржи. Сколько высѣяно на каждой десятинѣ?

24) 12$^1/_6$: 8$^3/_4$ = ? 25) 184$^5/_{12}$: 12$^2/_3$ = ?

26) 1$^1/_9$: 4$^5/_{11}$ = ? 27) 1$^7/_{13}$: 6$^4/_{11}$ = ?

28) 2$^4/_{11}$: 12$^6/_7$ = ? 29) 23$^1/_3$: 13$^4/_5$ = ?

30) Изъ двухъ неравныхъ чиселъ бóльшее есть 23$^4/_7$; но если бóльшее раздѣлить на мѐньшее, то *пятая* доля частнаго составитъ $^3/_8$. Найти мѐньшее число.

31) Изъ двухъ неравныхъ смѣшанныхъ чиселъ большее болѣе мѣньшаго въ 8 разъ. Какія эти числа, если сумма ихъ равна $15^2/_3$?

32) Къ числу $20^5/_6$ сколько разъ надобно прибавлять по $15^4/_7$, чтобы получить въ суммѣ $201^3/_4$?

33) Отъ числа $176^2/_3$ сколько разъ надобно отнимать по $11^4/_9$, чтобы въ остаткѣ вышло $9^6/_7$?

34) Раздѣлить 1 на $^7/_9$ и на частное, полученное отъ этого дѣленія, снова раздѣлить единицу.

§ 26.

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КО ВСѢМЪ ЧЕТЫРЕМЪ ДѢЙСТВІЯМЪ НАДЪ ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ.

1) Четвертая доля неизвѣстнаго числа, сложенная съ $42^2/_3$, равняется $132^5/_8$. Найти неизвѣстное число.

2) Требуется сложить $2^1/_3$ руб. съ $6^3/_4$ руб. и $4^2/_5$ руб.; изъ суммы вычесть $9^3/_8$ руб., остатокъ умножить на $3^5/_6$ и произведеніе раздѣлить на $^2/_7$.

3) Принято сукна: въ первый разъ 159 арш. $12^3/_4$ верш., во второй разъ 271 арш. $8^1/_2$ верш. и въ третій разъ $40^5/_6$ арш. Изъ этого числа израсходовано: сперва 79 арш. $10^2/_3$ верш., потомъ 102 арш. $4^1/_2$ верш. Сколько осталось аршинъ сукна и на какую сумму, если каждый аршинъ стоитъ $5^3/_4$ рубля?

4) Найти такую дробь, которой $^1/_3$ болѣе $^1/_9$ въ 7 разъ.

5) Найти число, котораго четверть болѣе одной восьмой того же числа на $45^1/_9$, уменьшенныхъ въ $3^1/_2$ раза.

6) $^1/_9$ шести и $^1/_3$ девяти составляютъ вмѣстѣ пятую часть отъ какого числа?

7) Найти двѣ дроби, которыхъ сумма равна $^{11}/_{18}$, и изъ которыхъ одна болѣе другой въ $8^3/_4$ раза.

8) Если $^7/_{12}$ умножить на 6, то $^1/_8$ этого произведенія какимъ числомъ будетъ болѣе или менѣе $^2/_3$?

9) Во сколько разъ частное, происшедшее отъ раздѣленія 16 на $2^2/_3$, болѣе или менѣе частнаго, происшедшаго отъ раздѣленія $2^1/_3$ на $^{11}/_{17}$?

10) Найти дробь, которой знаменатель вмѣстѣ съ числителемъ составляютъ 139, и притомъ знаменатель болѣе числится числомъ 17.

11) Двое купили возъ муки, въ которомъ было 5 четвертей $4^3/_4$ четверика. Одинъ изъ нихъ заплатилъ за эту муку въ $3^2/_3$ раза болѣе денегъ, нежели другой. Спрашивается: сколько придется муки на долю каждаго соразмѣрно заплаченнымъ ими деньгамъ?

12) Я задумалъ число, котораго половина, сложенная съ одною третью, составляетъ $203^4/_7$. Какъ велико все задуманное мною число?

13) Если къ $^7/_9$ неизвѣстнаго числа прибавить $^1/_4$ того же числа,

то получится число, которое 220 единицами будетъ болѣе $^2/_3$ того же неизвѣстнаго числа. Узнать какъ велико неизвѣстное число?

14) Узнать чѣмъ одна башня болѣе другой, если высота первой имѣетъ 13 саженъ $5^3/_4$ фута, а высота другой составляетъ отъ высоты первой $^4/_5$.

15) Купецъ продалъ $3^3/_4$ ящика чернослову, изъ которыхъ въ каждомъ было по 3 пуда $17^3/_8$ фунта. Сколько онъ получилъ за весь черносливъ, если каждый фунтъ продавалъ по $23^1/_2$ коп.?

16) Во сколько разъ $1^2/_3$ фунта безъ $15^3/_4$ золотниковъ болѣе $7^4/_7$ лотовъ?

17) Во сколько дней будетъ пройдено $354^3/_4$ версты, если въ каждый день употреблять на путешествіе по $4^2/_3$ часа, съ условіемъ проходить въ каждый $^5/_6$ часа по $4^1/_2$ версты?

18) Половина, четверть, восьмая и шестнадцатая доли неизвѣстнаго числа, будучи сложены съ $146^2/_5$, составляютъ цѣлое неизвѣстное число. Найти это число.

19) Найти двѣ дроби, которыя если вмѣстѣ сложить, то выйдетъ $1^{15}/_{16}$, а вычесть одну изъ другой, то получится $^2/_{11}$.

20) Я задумалъ число, къ которому если прибавить $5^3/_4$, то получится сумма, составляющая шесть седьмыхъ частей отъ $25^3/_4$. Какое число я задумалъ?

21) Если отъ $^7/_8$ неизвѣстнаго числа взять двѣ трети и къ нимъ прибавить четвертую долю $^5/_6$ того же числа, то выйдетъ 19. Какъ велико неизвѣстное число?

22) Дѣлимое вмѣстѣ съ частнымъ составляютъ $5324^8/_9$. Чему равно каждое изъ нихъ порознь, когда дѣлитель составляетъ $7^2/_5$?

23) $$\frac{(31^3/_4 + 6^1/_7 - 7^5/_6) \times 3^1/_2 + 9^2/_3 - {}^7/_{21}}{2^3/_5} = ?$$

24) Три человѣка получили наслѣдства: первый 2100 рублей, второй $^4/_5$ перваго и еще 750 рублей, а третій $^2/_3$ того, что получилъ второй, безъ 231 руб. Сколько получили второй и третій, а также сколько получили всѣ вмѣстѣ?

25) (3 берк. + $^5/_7$ пуда — $^1/_{11}$ фунт.) : (4 пуда — $2^5/_9$ лот.)=?

26) $$\frac{(145^2/_3 \text{ саж.} + 5^1/_4 \text{ фут.}) \times 4^4/_5}{11^5/_4 \text{ саж. } 6^1/_3 \text{ фут.}} = ?$$

27) Найти сумму двухъ чиселъ, причемъ извѣстно, что первое число $^5/_{11}$ всей суммы, а второе 546.

28) Въ водоемъ проведены двѣ трубы, изъ которыхъ первая наполняетъ его водою въ 9 часовъ, а другая въ 13 часовъ. Какая часть водоема наполнится въ $2^3/_4$ часа, когда вода будетъ вливаться въ него изъ обѣихъ трубъ въ одно время?

29) Прасолъ, на вопросъ; сколько у него быковъ? — отвѣчалъ: если къ тѣмъ быкамъ, которыхъ я имѣю, прибавить еще половину,

да треть того же числа и еще четверть отъ всѣхъ трехъ чиселъ, то я буду имѣть 165 быковъ. Сколько у него было быковъ?

30) $\frac{(5^3/_4 + 2^1/_7 - {}^{13}/_{14}) \times (4^1/_2 - 2^3/_5 + 1^1/_9)}{(2^2/_3 + 1^1/_6 - {}^5/_6) \times ({}^1/_4 - {}^7/_9 + 3)} = ?$

31) Еслибъ въ моемъ кошелькѣ, сказалъ нѣкто, было еще столько денегъ, сколько тамъ находится, да еще половина и четверть того же числа, то у меня до 100 рублей не доставало бы только одного рубля. Сколько у него было денегъ въ кошелькѣ?

32) Найти четыре дроби, которыхъ сумма равнялась бы 1, и первая дробь была бы въ $3^3/_4$ раза болѣе второй, а вторая въ $2^5/_6$ раза менѣе третьей.

34) Нѣкто имѣлъ 103 руб. $84^4/_7$ коп., изъ этой суммы онъ издержалъ 59 руб. $17^3/_4$ коп. Во сколько разъ надобно увеличить остатокъ, чтобъ получить прежнее число?

34) Нѣкто купилъ парчи $11^3/_4$ арш., заплативъ за каждый аршинъ по $17^1/_3$ рубля; изъ этой парчи онъ продалъ $5^5/_6$ аршинъ съ уступкою на каждый аршинъ противъ покупной цѣны $1^{24}/_{25}$ руб. На какую сумму онъ продалъ?

35) Тысяча рублей употреблена на раздачу по равной части 99-ти бѣднымъ крестьянамъ. Въ счетъ этой суммы имъ роздано хлѣбомъ $123^7/_8$ четвертей, полагая каждую четвертью по 5 рублей $13^1/_7$ коп., а остальное деньгами. Спрашивается: по сколько получилъ каждый крестьянинъ деньгами и хлѣбомъ?

36) Найти дробь, въ которой знаменатель болѣе числителя въ 7 разъ, а сумма обоихъ равна 152.

37) Во сколько дней будетъ издержано 2 пуда $14^3/_8$ фунта сахару, если каждый день издерживать по $15^2/_3$ лота?

38) Нѣкто изъ доставшагося ему по наслѣдству капитала издержалъ $^1/_3$ на уплату долговъ, $^2/_5$ на покупку дома, и затѣмъ у него осталось 14507 руб. $83^5/_6$ коп. Какъ велики были суммы, употребленныя имъ на уплату долговъ и на покупку дома?

49) Сколько разъ надобно отнимать отъ $250^4/_9$ по $17^2/_5$, чтобъ получить въ остаткѣ $11^5/_4$?

40) Сколько разъ надобно прибавлять къ $5^2/_7$ по $9^1/_2$, чтобы въ суммѣ вышло 50?

41) Нѣкто, имѣя въ сберегательной кассѣ 100 рублей, намѣренъ ежемѣсячно, для увеличенія этого капитала, вносить туда по 1 руб. $42^6/_7$ к. Во сколько времени капиталъ его въ сберегательной кассѣ удвоится, не считая процентовъ?

42) На одной полосѣ было посѣяно 3 четверти $5^5/_8$ четверика картофелю; урожай противъ посѣва былъ въ $9^1/_2$ разъ; три четвертыя доли изъ полученнаго урожая предполагается продать. Спрашивается: сколько можно получить за предполагаемый къ продажѣ картофель денегъ, если каждую четверть положить въ $6^2/_3$ рубля?

43) Два парохода, находясь на разстоянія 460 верстъ, идутъ на встрѣчу одинъ къ другому. Если первый проходитъ въ минуту $^1/_{11}$ версты, а другой $^1/_{12}$, то въ какое время они встрѣтятся, полагая, что на пути нигдѣ не останавливаются?

44) Нѣкто издержалъ $^5/_6$ своего капитала. Сосчитавъ свои деньги, онъ нашелъ, что еслибъ къ тѣмъ деньгамъ, которыя онъ теперь имѣетъ, прибавить еще 200 руб. $66^2/_3$ коп., то у него вышла бы ровно пятая часть всего капитала. Какъ великъ былъ весь его капиталъ?

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

О ДЕСЯТИЧНЫХЪ И НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЯХЪ.

Общее примѣчаніе. Изъ всѣхъ простыхъ дробей, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ отдѣлѣ, заслуживаютъ особаго вниманія, во-первыхъ, дроби, имѣющія знаменателемъ единицу съ однимъ или нѣсколькими нулями; напр. $^1/_{10}$, $^{15}/_{100}$, $^{275}/_{1000}$ и пр.; во-вторыхъ, такія дроби, выраженныя въ большихъ числахъ, которыя не могутъ быть сокращены, потому что числители и знаменатели ихъ суть первыя между собою числа; напр. $^{412}/_{1049}$, $^{127}/_{802}$, $^{159}/_{493}$ и проч. Вводить такія дроби въ исчисленіе значило бы слишкомъ его усложнять. Напротивъ, чрезъ пріисканіе вмѣсто нихъ такихъ дробей, которыя хотя *не точно*, но достаточно *приблизительно*, безъ большихъ погрѣшностей въ разностяхъ, могли бы ихъ замѣнять, но зато выраженныхъ въ малыхъ числахъ, выкладки упрощались бы значительно. Такъ, напримѣръ, дробь $^{159}/_{493}$, которую сократить невозможно, можетъ быть замѣнена, безъ большой погрѣшности, дробями $^9/_{28}$ и $^{10}/_{31}$, которыя разнствуютъ отъ нея на весьма малое количество, именно менѣе чѣмъ на $^1/_{868}$.

Первыя, имѣющія знаменателями единицу съ однимъ или нѣсколькими нулями, называются *десятичными дробями*. Онѣ представляютъ ту огромную выгоду, какъ увидимъ ниже, что въ исчисленіе достаточно вводить только ихъ числителей, чрезъ что дѣйствія надъ ними обращаются въ дѣйствія надъ простыми цѣлыми числами. Впослѣдствіи узнаемъ, что всякая простая дробь можетъ быть обращена въ десятичную, которою если не всегда *точно*, то по крайней мѣрѣ *приблизительно*, безъ небольшой погрѣшности, можно замѣнить простую дробь.

Дроби же, какъ въ указанномъ примѣрѣ $^{9}/_{28}$ и $^{10}/_{31}$, называются въ отношеніи дроби $^{159}/_{493}$ ея *приближенными* величинами. Онѣ получаются чрезъ разложеніе простыхъ несокращаемыхъ дробей, посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія знаменателя на числителя, числителя на первый остатокъ и т. д. (§ 6) въ дробные ряды, вообще называемые *непрерывными дробями*. Такъ, наприм. чрезъ разложеніе несокращаемой дроби въ непрерывную строку или непрерывную дробь

$$\frac{251}{764}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+{}^{2}/_{9}}}}$$

получаемъ приблизительныя величины этой дроби $^{22}/_{67}$ и $^{23}/_{70}$, которыми можно замѣнить эту несокращаемую дробь безъ небольшой погрѣшности. Далѣе, удостовѣримся, что и большая часть десятичныхъ дробей въ отношеніи простыхъ дробей, отъ которыхъ онѣ получены, также могутъ быть названы непрерывными.

Изъ изложеннаго очевидно, что введеніемъ въ ариѳметику десятичныхъ и непрерывныхъ дробей и замѣною ими простыхъ дробей мы только наилучшимъ способомъ достигаемъ одной и той же цѣли, т. е. *сокращать и упрощать выкладки надъ числами, выраженными въ цифрахъ.*

§ 27.

СЧИСЛЕНІЕ И ИЗОБРАЖЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

а. *Счисленіе десятичныхъ дробей.*

Какъ тысяча состоитъ изъ 10 сотенъ, сотня изъ десяти десятковъ и десятокъ изъ 10 единицъ, такъ каждая единица состоитъ изъ 10 равныхъ частей, или 10 *десятыхъ*, каждая десятая изъ десяти равныхъ частей, или 10 *сотыхъ*, каждая сотая изъ десяти равныхъ частей, или 10 *тысячныхъ*. Слѣдуя тому же порядку уменьшенія, постепенно получимъ *десяти-тысячныя*, *сто-тысячныя*, *милліонныя* части и т. д.

Изображая *десятую* ($^{1}/_{10}$), *сотую* ($^{1}/_{100}$), *тысячную* ($^{1}/_{1000}$) часть единицы и т. д., или нѣсколько *десятыхъ*, *сотыхъ*, *тысячныхъ* частей и т. д. посредствомъ цифръ, примѣчаемъ, что всѣ эти дроби имѣютъ

знаменателемъ единицу съ однимъ, двумя, тремя и т. д. нулями. Такія дроби именуются *десятичными*.

Примѣчаніе. Всѣ прочія дроби, для отличія отъ десятичныхъ, называются *простыми* — названіе, усвоенное употребленіемъ.

Легко замѣтить, что знаменатели десятичныхъ дробей, по мѣрѣ уменьшенія самихъ дробей въ десять разъ, *вдесятеро* увеличиваются. Такъ знаменатель одной сотой ($^1/_{100}$) вдесятеро болѣе знаменателя одной десятой ($^1/_{10}$); знаменатель одной тысячной ($^1/_{1000}$) вдесятеро болѣе знаменателя одной сотой ($^1/_{100}$) и т. д.

Отсюда получаемъ возможность подвести изображеніе десятичныхъ дробей подъ тѣ же самыя правила, какими руководствуемся при счисленіи цѣлыми числами. Дѣйствительно, если въ простомъ цифровомъ счисленіи цифры, слѣдуя отъ правой руки къ лѣвой, безпрестанно увеличиваютъ значеніе свое въ десять кратъ, то обратно, отъ лѣвой руки къ правой, онѣ теряютъ свое значеніе также въ десять кратъ. Поэтому, когда съ правой стороны отъ цѣлаго числа, написаннаго цифрами, поставимъ еще нѣсколько цифръ, отдѣливъ притомъ цѣлое число отъ этихъ новыхъ цифръ какимъ-либо знакомъ, напримѣръ запятою, то послѣднія выразятся части единицы, постепенно въ десять разъ уменьшающіяся; т. е. сперва *десятыя*, потомъ *сотыя*, *тысячныя* и т. д. Объяснимъ это примѣрами. Такъ въ числѣ 346 цифра 3 означаетъ *три сотни*, цифра 4 — *четыре десятка*, а цифра 6 — *шесть единицъ*. Очевидно, что цифры уменьшаютъ свое значеніе въ 10 разъ, переходя постепенно отъ лѣвой руки къ правой. Слѣд. если послѣ единицъ предложеннаго числа поставимъ какой-нибудь знакъ, напримѣръ запятую, и потомъ за нимъ напишемъ нѣсколько цифръ, напримѣръ вотъ такъ:

346,528

то, вслѣдствіе обыкновеннаго закона уменьшенія достоинства цифръ въ 10 разъ, по мѣрѣ перестановки ихъ отъ лѣвой руки къ правой, цифра 5, стоящая на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, должна означать число въ десять разъ меньше единицъ, т. е. *пять десятыхъ*; цифра 2 — *двѣ сотыя*, ибо эта цифра стоитъ съ правой стороны цифры, означающей десятыя доли, а потому и должна имѣть значеніе въ 10 кратъ меньше десятыхъ. Наконецъ цифра 8, по тому же самому закону уменьшенія, должна означать *тысячныя* части единицы.

Этимъ-то значеніемъ цифръ по мѣсту, ими занимаемому, и воспользовались для изображенія десятичныхъ дробей безъ знаменателей. Поэтому, что означаетъ число: 346,528?

Отв. Тристи сорокъ шесть единицъ (или цѣлыхъ) и, сверхъ того, *пять десятыхъ, двѣ сотыя* и *восемь тысячныхъ*.

Если къ написанному числу прибавимъ еще цифру 9, то ею выразится девять *десяти-тысячныхъ*.

В. Прочтите число: 59,213296.

О. 59 единицъ, 2 десятыя, 1 сотая, 3 тысячныя, 2 десяти-тысячныя, 9 сто-тысячныхъ и 6 милліонныхъ частей единицы.

Впрочемъ выговариваніе этихъ десятичныхъ частей можно сократить. Возьмемъ для примѣра еще цѣлое число съ дробью. Пусть 39,6483. Оно читается такъ: 39 цѣлыхъ, 6 десятыхъ, 4 сотыя, 8 тысячныхъ и 3 десяти-тысячныхъ части единицы.

Извѣстно, что означенныя теперь части выражаются слѣдующимъ образомъ посредствомъ числителей и знаменателей: 6 десятыхъ черезъ $^6/_{10}$; 4 сотыя черезъ $^4/_{100}$, 8 тысячныхъ черезъ $^8/_{1000}$, а 3 десяти-тысячныя такъ: $^3/_{10000}$. Въ $^6/_{10}$ содержится $^{60}/_{100}$. Поэтому въ $^6/_{10}$ и $^4/_{100}$ всего $^{64}/_{100}$. Въ $^6/_{10}$ содержится $^{600}/_{1000}$, а въ $^4/_{100}$ будетъ $^{40}/_{1000}$. Слѣдовательно $^6/_{10} + {}^4/_{100} + {}^8/_{1000}$ вмѣстѣ составляютъ 648 тысячныхъ. $^6/_{10} = 6000$ десяти-тысячнымъ; а $^4/_{100} = {}^{400}/_{10000}$; $^8/_{1000} = {}^{80}/_{10000}$. Итакъ дроби: $^6/_{10} + {}^4/_{100} + {}^8/_{1000} + {}^3/_{10000}$ составляютъ всего 6483 десяти-тысячныхъ. Отсюда видно, что *число стоящее съ правой стороны запятой, выговаривается точно также, какъ и помѣщенное съ лѣвой стороны запятой, съ тою только разницею, что къ нему прибавляютъ наименованіе тѣхъ десятичныхъ частей, которыя означаются послѣднею цифрою, считая отъ запятой вправо.*

Воп. Выговорите число: 29,30205; но прежде скажите, что означаютъ нули на второмъ и четвертомъ мѣстахъ послѣ запятой?

Отв. Нули показываютъ, что въ предложенномъ числѣ нѣтъ ни сотыхъ частей, ни десяти-тысячныхъ. Предложенное число выговаривается такъ: 29 цѣлыхъ, тридцать тысячъ двѣсти пять *сто-тысячныхъ*. Потому что $^3/_{10} = {}^{30}/_{100} = {}^{300}/_{1000} = {}^{3000}/_{10000} = {}^{30000}/_{100000}$; $^2/_{1000} = {}^{200}/_{100000}$, $^{30000}/_{100000} + {}^{200}/_{100000} + {}^5/_{100000} = 30205$ *сто-тысячныхъ*.

Задача.

1) Выговорить число: 2.00109

2) » » 59,00000001

Воп. Какъ выговаривается число: 5.23?

Отв. Пять единицъ, двадцать три сотыя части единицы.

Воп. А если откинуть запятую, что произойдетъ?

Отв. Пятьсотъ двадцать три единицы. Слѣдовательно *запятая есть необходимый знакъ въ изображеніи десятичной дроби. Она удерживается даже и тогда, когда должно бываетъ выразить одну десятичную дробь безъ цѣлаго числа: послѣднее въ такомъ случаѣ замѣняется нулемъ, поставляемымъ съ лѣвой стороны запятой.* Такъ, напримѣръ

0,392 .

означаетъ: триста девяносто двѣ тысячныя.

Задача.

1) Выговорить дробь: 0,514
2) » » 0,00129

Воп. Которая изъ двухъ дробей болѣе: 0,7 или 0,54?

Отв. 0,7; потому что первая дробь есть *семь десятыхъ*, а вторая *пятьдесятъ четыре сотыя.* По приведеніи же первой дроби въ сотыя части, найдемъ, что въ ней содержится *семьдесятъ сотыхъ.*

Итакъ *изъ двухъ или нѣсколькихъ десятичныхъ дробей не всегда та большая, которая выражена большимъ числомъ цифръ, но та, въ которой ближайшая къ запятой значащая цифра есть большая.*

Такъ: $0,51 > 0,499$
$0,068 > 0,0389181791.$

Кромѣ двухъ предложенныхъ способовъ счисленія десятичныхъ дробей есть еще третій. Мы знаемъ, что какое-либо смѣшанное число, положимъ 17,59 выговаривается такъ: 17 цѣлыхъ 59 сотыхъ; но 17 единицъ все равно, что $^{170}/_{10}$ или $^{1700}/_{100}$; 1700 сотыхъ + 59 сотыхъ = 1759 сотымъ частямъ единицы. Слѣдовательно цѣлое число, находящееся предъ десятичною дробью, всегда можетъ быть приведено въ тѣ части, какія означаются самою десятичною дробью.

Поэтому всякое смѣшанное число, т. е. состоящее изъ цѣлаго числа и десятичной дроби, можно выговорить трояким образомъ:

Во-первыхъ, выговаривая сперва знаки, изображающіе цѣлое число, а потомъ каждый изъ знаковъ, составляющихъ десятичную дробь, съ присовокупленіемъ наименованія ихъ отдѣловъ, какъ-то: сотыхъ, тысячныхъ и т. д. частей единицы.

Во-вторыхъ, выговаривая также сперва знаки, изображающіе цѣлое число, а потомъ знаки, составляющіе десятичную дробь, какъ бы они составляли цѣлое число, съ присовокупленіемъ къ нему на-

именованія тѣхъ частей, къ которому принадлежитъ послѣдній знакъ десятичной дроби, считая отъ лѣвой руки къ правой.

Въ третьихъ, выговаривая вдругъ всѣ знаки смѣшаннаго числа, какъ бы оно было одно цѣлое число, съ присовокупленіемъ къ нему наименованія того отдѣла частей, къ которому принадлежитъ послѣдній знакъ отъ лѣвой руки.

Напримѣръ, число 23,1235 можно выговорить такъ:

а) Двадцать три единицы, одна десятая, двѣ сотыя, 3 тысячныя и пять десяти-тысячныхъ;

б) Двадцать три единицы, тысяча двѣсти тридцать пять десяти-тысячныхъ;

в) Двѣсти тридцать одна тысяча двѣсти тридцать пять десяти-тысячныхъ.

Изъ всего сказаннаго извлекаемъ слѣдующія сокращенныя правила:

1) *Десятичныя дроби могутъ быть изображены безъ знаменателей, которые легко подразумѣваются.*

2) *Величина долей, въ которыхъ изображается десятичная дробь, зависитъ отъ числа цифръ, ее составляющихъ. Если въ десятичной дроби одна цифра, то она выражается въ десятыхъ доляхъ; если двѣ — въ сотыхъ, три — въ тысячныхъ и т. д.*

3) *Величина же самой десятичной дроби не столько зависитъ отъ числа знаковъ, ее изображающихъ, сколько отъ величины ближайшей къ запятой значащей цифры.*

4) *Цифры, стоящія по правую руку послѣ запятой, которая служитъ знакомъ отдѣленія цѣлаго числа отъ дроби, составляютъ числителя десятичной дроби, а подразумѣваемый знаменатель есть 1, сопровождаемая такимъ числомъ нулей, сколько находится всего цифръ послѣ запятой.*

b. Изображеніе десятичныхъ дробей.

Мы видѣли, что всякая десятичная дробь не нуждается въ знаменателѣ, который всегда можетъ быть подразумѣваемъ; поэтому нѣтъ надобности его и писать. Чтобъ изобразить $^2/_{10}$, напишемъ сперва нуль, за нимъ запятую, а потомъ цифру 2, вотъ такъ: 0,2. Еслибъ предъ цифрою 2 не стояло нуля съ запятою, тогда бы не было означено перехода отъ единицъ къ десятымъ долямъ и цифра 2 означала

бы двѣ единицы; теперь же стоя на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, она означаетъ 2 десятыя.

Для выраженія числа $3\,^{517}/_{1000}$ пишу 3, ставлю послѣ этой цифры запятую и потомъ пишу сперва цифру 5, далѣе 1, наконецъ 7,— вотъ такимъ образомъ: 3,517; ибо дробь $^{517}/_{1000}$ состоитъ изъ $^{500}/_{1000}$, $^{10}/_{1000}$ и $^{7}/_{1000}$; $^{500}/_{1000}$ все равно, что 5 десятыхъ; $^{10}/_{1000} = 1$ сотой; 5 десятыхъ должно поставить на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, 1 сотую — на второмъ и 7 тысячныхъ — на третьемъ.

Еще примѣръ: для означенія $^{17}/_{1000}$ на первомъ мѣстѣ послѣ запятой надобно поставить нуль, потому что въ дроби $^{17}/_{1000}$, которую можно разложить на $^{1}/_{100}$ и $^{7}/_{1000}$, не содержится ни одной десятой. Слѣдовательно $^{17}/_{1000} = 0{,}017$. Какъ надобно-бы было читать это выраженіе, еслибъ между запятою и 1 не стояло нуля?

Примѣры:

$$5\,^{37}/_{1000} = 5{,}037$$
$$^{561}/_{100000} = 5{,}00561$$
$$^{1}/_{1000000} = 0{,}000001$$
$$^{203}/_{100000} = 0{,}00203.$$

Изъ этихъ примѣровъ извлекаемъ правила:

1) *Во всякой десятичной дроби должно быть столько цифръ послѣ запятой, сколько въ знаменателѣ находится нулей послѣ единицы, потому что собственно числомъ этихъ цифръ и опредѣляется знаменатель дроби.*

2) *Если въ числителѣ данной дроби находится столько же цифръ, сколько въ знаменателѣ нулей, то числитель пишется какъ онъ есть, предъ нимъ ставится запятая, а за нею влѣво цѣлое число, когда при дроби оно находится, въ противномъ случаѣ — нуль.*

3) *Если число цифръ числителя менѣе числа нулей знаменателя, то между запятою и числителемъ вставляется столько нулей, сколько показываетъ разность между числомъ нулей знаменателя и числомъ цифръ числителя.*

4) *Наконецъ, когда въ десятичной дроби число цифръ числителя превышаетъ число нулей въ знаменателѣ, то въ числителѣ отдѣляется отъ правой стороны къ лѣвой для десятичной дроби столько цифръ, сколько находится нулей въ знаменателѣ; остальныя же цифры будутъ означать цѣлое число.*

§ 28.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

Слѣдующія дробныя и смѣшанныя числа изобразить безъ знаменателей, т. е. въ видѣ десятичныхъ частей.

1) $3^2/_{10}$ 2) $2^7/_{10}$ 3) $5^{23}/_{100}$ 4) $1^{73}/_{100}$ 5) $5^{93}/_{100}$ 6) $11^{128}/_{1000}$ 7) $4^{2815}/_{10000}$ 8) $7^{18312}/_{100000}$ 9) $127^{123456789}/_{1000000000}$.

10) $^8/_{10}$ 11) $^9/_{10}$ 12) $^{21}/_{100}$ 13) $^{76}/_{100}$ 14) $^{99}/_{100}$ 15) $^{127}/_{1000}$ 16) $^{529}/_{1000}$ 17) $^{2475}/_{10000}$ 18) $^{521673}/_{1000000}$.

19) $2^5/_{100}$ 20) $3^1/_{100}$ 21) $5^{73}/_{1000}$ 22) $2^{25}/_{1000}$ 23) $7^9/_{1000}$ 24) $5^{23}/_{10000}$ 25) $3^{217}/_{100000}$ 26) $^5/_{100000}$ 27) $1^{13}/_{1000000}$ 28) $7^7/_{1000000000}$.

29) $^3/_{100}$ 30) $^{21}/_{10000}$ 31) $^{17}/_{100000}$ 32) $^{59}/_{1000000}$ 33) $^{111}/_{1000000000}$ 34) $^1/_{10000000000}$.

Слѣдующія десятичныя дроби изобразить въ видѣ простыхъ дробей, т. е. съ знаменателемъ.

35) 4,5 36) 2,9 37) 4,17 38) 6,74 39) 2,7691 40) 0,3 41) 0,12 42) 0,314 43) 0,4817 44) 0,7134278.

45) 3,01 46) 4,08 47) 2,025 48) 9,007 49) 1,001 50) 3,0926 51) 5,0008 52) 7,0000029.

53) 0,052 54) 0,027 55) 0,009 56) 0,001 57) 0,0025 58) 0,0024 59) 0,0001009 60) 0,00029000 61) 0,000000007.

§ 29.

ИЗМѢНЕНІЕ ВЕЛИЧИНЫ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

а. Увеличеніе десятичныхъ дробей.

Увеличеніе дроби, какъ извѣстно, зависитъ между прочимъ отъ уменьшенія ея знаменателя, а уменьшеніе ея, напротивъ, отъ увеличенія послѣдняго. Въ десятичной же дроби, какъ видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, знаменатель уменьшается или увеличивается по мѣрѣ уменьшенія или увеличенія числа цифръ, стоящихъ послѣ запятой, или, что одно и то же, отъ перемѣщенія запятой справа влѣво, или обратно. Въ самомъ дѣлѣ, дробь $^2/_{100}$, будучи увеличена

въ 10 разъ, составляютъ $^2/_{10}$; но $^2/_{100}$ изображаются черезъ 0,02, а двѣ десятыя — черезъ 0,2. Сравнивая между собою оба выраженія: 0,02 и 0,2, находимъ, что для увеличенія $^2/_{100}$ въ 10 разъ стоитъ только передвинуть запятую отъ лѣвой руки къ правой черезъ одинъ знакъ, и тогда цифра 2 будетъ стоять на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, — что и должно быть, ибо цифры, занимающія первое мѣсто послѣ запятой, означаютъ десятыя части единицы.

Возьмемъ еще примѣръ: *требуется увеличить дробь 0,479 въ 100 разъ.*

Дробь 0,479 можно изобразить такъ: $^{479}/_{1000}$.

Увеличить эту дробь въ 100 разъ значитъ уменьшить ея знаменателя въ 100 разъ. $\frac{479}{1000:100} = {}^{479}/_{10}$. Число $^{479}/_{10}$ состоитъ изъ 47 цѣлыхъ и $^9/_{10}$, что по принятому нами способу изображенія можно представить такъ: 47,9.

Сравнивая теперь оба выраженія

$$\left.\begin{matrix} 0,479 \\ 47,9 \end{matrix}\right\}$$

видимъ, чтобъ изъ перваго получить второе, надобно только въ первомъ перенести запятую черезъ два знака отъ лѣвой руки къ правой и поставить ее между цифрами 7 и 9. Черезъ это перемѣщеніе цифра 4, означавшая сперва десятыя доли единицы, получаетъ значеніе десятковъ единицъ; цифра 7, показывавшая сотыя, означаетъ единицы, а 9, которая выражала тысячныя, показываетъ теперь десятыя доли. Итакъ выходитъ, что каждая часть даннаго дробнаго числа увеличилась въ 100 разъ, а потому и все число также увеличилось въ 100 разъ. Это можно объяснить и черезъ разложеніе. Дробь $0,479 = {}^4/_{10} + {}^7/_{100} + {}^9/_{1000}$; $^4/_{10} \times {}^{100} = 40$ един., $^7/_{100} \times {}^{100} = 7$ един.; $^9/_{1000} \times {}^{100} = {}^9/_{10}$; 40 един. + 7 ед. + $^9/_{10} = 47^9/_{10} = 47,9$.

Примѣненія. Увеличить дробь 0,0439 въ 10, 100, 1000 разъ. — Число 5,308 увеличить сперва въ 10 разъ, а потомъ въ 100 разъ.— Дробь 0,0000007 увеличить въ милліонъ разъ.

Такимъ образомъ получаются правила:

1) *Чтобъ увеличить какую-нибудь десятичную дробь въ 10 разъ, надобно только значеніе каждой цифры увеличить въ 10 разъ,—что и сдѣлается, когда занятая перенесется отъ лѣвой руки къ правой черезъ одну цифру.*

Такъ:

$$0,39 \times 10 = 3,9$$
$$0,0003 \times 10 = 0,003.$$

2) *Для увеличенія десятичной дроби въ 100 разъ, должно значеніе каждой цифры увеличить въ 100 разъ, или, все тоже, переставить запятую слѣва вправо черезъ два знака.*

$$0,497 \times 100 = 49,7$$
$$0,0002 \times 100 = 0,02.$$

Теперь не трудно понять, какимъ образомъ увеличить десятичную дробь въ 1000, 10000, 100000 и т. д. разъ.

Вотъ примѣры:

$$7,309767 \times 10 = 73,09767$$
$$7,309767 \times 100 = 730,9767$$
$$7,309767 \times 1000 = 7309,767$$
$$7,309767 \times 10000 = 73097,67 \text{ и т. д.}$$

Здѣсь намъ представляются два важныя замѣчанія.

1) Увеличивая какую-либо дробь, положимъ 0,0053, по извѣстному намъ закону всякій разъ вдесятеро, мы можемъ наконецъ дойти до того, что вмѣсто дроби получимъ одно цѣлое число. Дѣйствительно, увеличивъ дробь 0,0053 въ десять тысячъ кратъ, получимъ число 53 единицы. Въ этомъ случаѣ въ запятой не нуждаемся болѣе, ибо дроби уже не существуетъ.

Сравнивая между собою оба числа: 0,0053 и 53, видимъ, что послѣднее есть не что иное, какъ числитель первой дроби. Отсюда заключаемъ, что если въ какой-нибудь десятичной дроби отнимемъ вовсе запятую, то получимъ одного числителя, который въ этомъ случаѣ есть выраженіе цѣлаго числа, происшедшаго отъ увеличенія данной дроби во столько разъ, сколько находится единицъ въ знаменателѣ.

Примѣненія. Что произойдетъ съ дробью 0,07, если откинуть запятую? — Что надобно сдѣлать съ дробью 0,4159 если желаемъ увеличить ее въ 10000 разъ?

2) Когда же хотимъ узнать произведеніе какой-либо десятичной дроби на множителя, состоящаго изъ 1 съ числомъ нулей, превышающимъ число десятичныхъ знаковъ самой дроби, то для полученія его стоитъ только къ числителю прибавить съ правой стороны столько нулей, сколько показываетъ разность между числомъ нулей множителя и числомъ цифръ десятичной дроби.

Такъ произведеніе 0,94 × 1000 = 940, потому что разность между числомъ нулей множителя и числомъ десятичныхъ знаковъ дроби есть 1.

Произведеніе 0,2 × 10000 = 2000. Здѣсь къ числителю дроби прибавлено три нуля, ибо разность въ этомъ случаѣ равна 3.

Причина эта сама по себѣ очевидна и основывается на общемъ законѣ перемѣщенія запятой отъ лѣвой руки къ правой. Чтобы въ послѣднемъ примѣрѣ дробь 0,2 увеличить въ 10000 разъ, нужно запятую переставить слѣва вправо черезъ четыре знака, а какъ въ дроби всего одна цифра, то и слѣдуетъ послѣ цифры 2 поставить еще три нуля, чтобы запятая могла занять приличное ей мѣсто.

Сведя все сказанное вмѣстѣ, составится слѣдующее общее правило: *Чтобъ увеличить десятичную дробь въ 10, 100, 1000 разъ и т. д., должно перенести запятую отъ лѣвой руки къ правой на 1, 2, 3 цифры и т. д., вообще на столько цифръ, сколько во множитель находится нулей послѣ единицы. Если же въ десятичной дроби нѣтъ столько знаковъ, черезъ сколько нужно переставить запятую, то недостающее число ихъ добавляется нулями.*

b. Уменьшеніе десятичныхъ дробей.

Какъ перемѣщеніе запятой слѣва вправо увеличиваетъ значеніе числа, такъ, обратно, перемѣщеніе справа влѣво уменьшаетъ его.

Если въ выраженіи 13,99 переставимъ запятую черезъ одинъ знакъ влѣво, то получимъ 1,359. Черезъ таковую перестановку вмѣсто одного десятка получили единицу, вмѣсто 3 единицъ — три десятыя, вмѣсто 5 десятыхъ — пять сотыхъ, а вмѣсто 9 сотыхъ — 9 тысячныхъ. Однимъ словомъ, каждая изъ цифръ получила значеніе въ десять разъ меньшее противъ прежняго; слѣдовательно и все число уменьшилось въ десять разъ.

Повѣримъ сказанное нами на самомъ дѣйствіи.

$13{,}59 = 13^{59}/_{100} = ^{1359}/_{100};\ ^{1359}/_{100} : 10 = ^{1359}/_{1000} = 1{,}359.$

Итакъ *раздѣлить какую-либо десятичную дробь на 10 все тоже значить, что переставить запятую отъ правой руки къ лѣвой черезъ одну цифру, и, обратно, переставить въ десятичной дроби запятую на одинъ знакъ влѣво значитъ уменьшить дробь въ десять разъ.*

Примѣры:

$0{,}973 : 10 = 0{,}0973$

$0{,}0029 : 10 = 0{,}00029.$

Какъ черезъ дѣленіе десятичной дроби на 10, запятая перемѣщается отъ правой руки къ лѣвой на одну цифру, такъ при раздѣленіи дроби на 100, запятую должно переставить черезъ 2 цифры; на 1000 — черезъ 3 цифры и т. д., вообще на столько цифръ, сколько въ дѣлитель находится нулей послѣ единицы.

Примѣры	49,2	: 10	=	4,92
	5,3	: 100	=	0,053
	0,29	: 1000	=	0,00029
	0,1	: 1000000	=	0,0000001 и проч. и проч.

Примѣненія. Сперва увеличьте смѣшанное число 2,5918 во сто разъ, а потомъ уменьшите полученное произведеніе въ 10000 разъ. — Я задумалъ такое число, которое, будучи увеличено въ 10 разъ, а потомъ уменьшено въ 1000 разъ, составитъ 2,13. Какое число я задумалъ? — Дробь 0,001 произошла отъ увеличенія первоначальнаго числа въ 1000 разъ, а потомъ отъ уменьшенія произведенія въ милліонъ разъ. Какое было первоначальное число?

§ 30.

ПРИВЕДЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ КЪ ОДИНАКОВОМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ.

Если въ десятичной дроби отъ числа цифръ, стоящихъ послѣ запятой, зависитъ величина знаменателя, то очевидно, что двѣ или нѣсколько десятичныхъ дробей, въ которыхъ число десятичныхъ знаковъ не одинаковое, должны назваться *разнородными* между собою. Чтобы сдѣлать такія дроби *однородными* или, все тоже, *привести ихъ къ одинаковому знаменателю*, необходимо уравнять въ нихъ число десятичныхъ знаковъ, или недостающее число ихъ въ одной дроби предъ другою дополнить нулями. Но можемъ ли мы по произволу съ правой стороны десятичной дроби приписывать нули?

Мы знаемъ, напримѣръ, что $^7/_{10} = {}^{70}/_{100} = {}^{700}/_{1000}$ и т. д., а это все равно, что 0,7 = 0,70 = 0,700 и т. д.

Равнымъ образомъ

0,2 = 0,20 = 0,200 и проч.
0,13 = 0,130 = 0,1300 и проч.

Пусть даны двѣ дроби: 0,37 и 0,279. Одна изъ нихъ выражена въ сотыхъ частяхъ единицы, а другая въ тысячныхъ. Чтобы при-

вести ихъ въ одинакія части, должно 37 сотыхъ обратить въ тысячныя, что весьма легко; ибо 37 сотыхъ = 370 тысячныхъ; т. е. 0,37 = 0,370.

Хотя черезъ прибавленіе нуля съ правой стороны десятичной дроби, число частей увеличилось въ десять разъ, однакожъ зато части сдѣлались въ десять разъ мельче, что въ сущности нисколько не измѣняетъ дроби. Равнымъ образомъ, прибавивъ съ правой стороны десятичной дроби 0,73 три нуля (0,73000). мы увеличиваемъ число частей въ 1000 разъ, но въ то же время самыя части дѣлаемъ въ 1000 разъ мельче: значитъ дробь не перемѣнитъ своего достоинства.

Итакъ вообще *приписаніе какого бы то ни было числа нулей съ правой стороны десятичной дроби не измѣняетъ ея значенія или величины.*

Теперь привидѣніе нѣсколькихъ десятичнымъ дробей къ одному знаменателю не представляетъ ни малѣйшей трудности. Пусть требуется *привести къ одинаковому знаменателю слѣдующія дроби:*

0,27
0,0073
0,12345.

Здѣсь самый большой знаменатель есть 100000; поэтому чтобъ дробь 0,27 привести въ стотысячныя части, должно съ правой стороны ея прибавить 3 нуля; во второй же дроби довольно прибавить одинъ нуль. Такимъ образомъ получимъ:

разнородныя дроби	0,27	=	0,27000	однородныя дроби
	0,0073	=	0,00730	
	0,12345	=	0,12345	

Теперь, послѣ предыдущихъ объясненій относительно десятичныхъ дробей, можно прямо приступить къ изложенію различныхъ надъ ними дѣйствій. Но здѣсь кстати считаемъ нужнымъ предварительно представить таблицы главнѣйшихъ изъ иностранныхъ мѣръ, исчисленіе надъ которыми удобнѣе производить десятичными дробями.

§ 31.

Въ дополненіе къ таблицѣ разныхъ мѣръ, приложенной къ задачамъ надъ составными именованными числами (книга 1-я, § 36), присовокупимъ здѣсь таблицы болѣе употребительныхъ иностранныхъ мѣръ, выраженныхъ въ десятичныхъ доляхъ.

I. *Таблица французскихъ метрическихъ мѣръ.*

Метръ, основная единица новой французской мѣры длины, составляетъ отъ *четверти* земнаго меридіана *десяти-милліонную* часть. Эта основная мѣра, будучи сравнена съ прежними французскими мѣрами, оказалась равною 3 футамъ 11,3497 . . . линіямъ старой французской мѣры. Всѣ прочія мѣры составлены по метру на основаніи десятичной системы. Для тѣхъ мѣръ, которыя болѣе метра, приняты названія греческія: *дека* (10), *гекто* (100), *кило* (1000), *миріа* (10000), а для меньшихъ — латинскія: *деци* ($^1/_{10}$), *центи* ($^1/_{100}$), *милли* ($^1/_{1000}$). Такимъ образомъ составились слѣдующія мѣры.

1) *Линейныя.*

1 метръ = 3,0788 париж. фута или около 22,5 русск. вершка.
1 декаметръ = 10 метрамъ = 225 русск. вершк.
1 гектометръ = 10 декаметрамъ = 100 метрамъ = 2250 вершк.
1 километръ = 10 гектометрамъ = 1000 метрамъ = 22500 вершк. *)
1 миріаметръ = 10000 метрамъ = 225000 вершк. или 9,37400 русск. верстамъ.
1 дециметръ = $^1/_{10}$ метра = 2,25 вершк.
1 центиметръ = $^1/_{100}$ метра = 0,225 вершк.
1 миллиметръ = $^1/_{1000}$ метра = 0,0225 вершк.

2) *Поземельныя мѣры.*

За основаніе поземельныхъ мѣръ принятъ *аръ*, равняющійся *ста* квадратнымъ метрамъ.
1 миріаръ = 10000 арамъ.
1 гектаръ = 100 арамъ.
1 центіаръ = $^1/_{100}$ ара = 1 квадрат. метру.

3) *Мѣры для жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ.*

За основаніе ихъ принятъ *литръ*, равняющійся 1 кубическому дециметру.
1 килолитръ = 1000 литрамъ.
1 гектолитръ = 100 литрамъ, или 8,1308 русск. ведрамъ.
1 декалитръ = 10 литръ.
1 децилитръ = $^1/_{10}$ литра.

4) *Мѣры объемовъ.*

Здѣсь служитъ основаніемъ *стеръ*, или кубическій метръ.
1 стеръ = 1 кубич. метру.
1 децистеръ = $^1/_{10}$ стера.

---

*) Отсюда видно, что километръ только на $31^1/_4$ сажени менѣе версты.

5) *Мѣры вѣса.*

Основаніемъ этихъ мѣръ служитъ *грамъ*, равняющійся вѣсомъ кубическому центиметру чистой перегнанной воды при наибольшей ея плотности.

1 миріаграмъ = 10000 грамамъ.
1 килограмъ = 1000 грамамъ.
1 гектограмъ = 100 грамамъ.
1 декаграмъ = 10 грамамъ,
1 дециграмъ = $^1/_{10}$ грама.
1 центиграмъ = $^1/_{100}$ грама.
1 метрическій центнеръ = 100 килограмамъ = 100000 грам.

Примѣч. Кромѣ того приняты еще: квинталь (quintal) во 100 килограмовъ, и милліеръ (millier) или 1000 килограмовъ, иначе *баръ* (bar) или *тона.*

6) *Монеты.*

За основаніе служитъ *франкъ*, серебряная монета, вѣсомъ въ 5 грамовъ, содержащая въ себѣ 9 частей чистаго серебра и 1 часть лигатуры.

Золотыя монеты въ 40, 20 и 10 франковъ.
Серебряныя монеты въ 5, 2, 1, $^1/_2$, $^1/_4$ франка.
Децимъ = $^1/_{10}$ франка.
Центимъ = $^1/_{100}$ франка.
Мѣдныя: $^1/_2$ децима и центимъ или сантимъ ($^1/_{100}$ ф.).

II. *Сравнительная таблица главныхъ старыхъ французскихъ мѣръ съ новыми.*

1) *Мѣры длины.*

1 париж. туазъ = 1,94904 метра.
1 париж. футъ = $^1/_6$ туаза = 0,32484 метра.
1 дюймъ = $^1/_{12}$ фута = 0,027070 метра.
1 линія = $^1/_{12}$ дюйм. = 0,002256 метра.
1 метръ = 3,07844 футамъ.

2) *Мѣры вѣса.*

1 фунтъ (poids de marc) = 0,48950 килограма.
1 унція = $^1/_{16}$ фунта = 0,03059 килограма.
1 драхма = $^1/_8$ унціи = 0,003824 килограма.
1 гранъ (grain) = $^1/_{72}$ драхмы = 0,0000531 килогр.
1 килограмъ = 2,04288 фунтамъ.

3) *Золотыя монеты.*

Двойной луидоръ = 48 ливрамъ; вѣсу въ немъ 15,29706 грамовъ. Простой луидоръ = 24 ливрамъ.

4) *Серебряныя монеты.*

1 экю = 6 ливрамъ; вѣсъ его 29,4883 грамовъ.
1 полу-экю = 3 ливрамъ.
1 ливръ = 20 су; 1 су = 12 денье.
Мелкія монеты бывали въ 6, 12, 15, 24 и 30 су.

III. *Сравнительная таблица главныхъ русскихъ и англійскихъ мѣръ съ новыми французскими.*

1) *Мѣры длины.*

1 русск. или англійск. футъ = 0,30479 метра.
1 сажень = $2^1/_3$ ярда = 2,1335 метра.
1 ярдъ = $1^2/_7$ арш. = 0,91438 метра.
1 аршинъ = $^7/_9$ ярда = 0,71119 метра.
1 метръ = 1,40610 аршина.

2) *Мѣры вѣса.*

1 русск. фунтъ = 1,09709 англ. тройск. фунта = 0,90252 англ. торговаго фунта (avoir du pois) = 0,40952 килограма.
1 килограмъ = 2,44190 русскаго фунта = 2,67921 англ. тройскаго фунта = 2,20461 англ. торговаго фунта.

3) *Монеты.*

1 фунтъ стерлингъ = 20 шиллингамъ (банковая).
1 крона = 5 шиллингамъ.
1 шиллинъ = 12 пенсамъ.
1 пенсъ = 4 фартингамъ.
1 фартингъ = 0,64 копѣйки серебра.
1 рубль серебра = 3,281 шиллингамъ = 3,996 франкамъ.
1 шиллингъ = 0,3048 руб. сер. = 1,22 франка.
1 франкъ = 0,25022 руб. сереб. = 0,82 шиллинга.

IV. *Сравнительная таблица примѣчательнѣйшихъ иностранныхъ монетъ, имѣющихъ обращеніе въ Россіи.*

Серебряныя монеты.

Предварительно замѣтимъ, что хотя основною серебряною монетою и установлено у насъ съ давнихъ поръ быть рублю, съ которымъ только и можно сравнивать иностранныя серебряныя монеты, однакожъ такого рубля давно уже не видно въ обращеніи. Его замѣняетъ кредитный билетъ (бумажный), который въ общемъ обращеніи размѣнивается на слѣдующія низкопробныя монеты: 5 двугривенныхъ, или на 6 пятнадцатикопѣечниковъ и 1 гривенникъ, а также на мелкія по достоинству мѣдныя монеты въ 5, 3, 2 и 1 копѣйки. Настоящій серебряный рубль, котораго трудно даже и достать, установленный указомъ 2-го іюля 1810 г., долженъ быть $83^1/_3$-й пробы; т. е. чтобы въ каждомъ фунтѣ монеты заключалось $83^1/_3$ золотника чистаго серебра и только $12^2/_3$ золотниковъ лигатуры. Онъ долженъ быть такой величины, чтобы изъ $5^1/_{16}$ фунта серебра 84-й пробы чеканилось 100 рублей, въ просторѣчіи *цѣлковыхъ*, такъ что изъ одного фунта серебра должно выходить $22^{34}/_{45}$ рублей. Съ такимъ только рублемъ мы и можемъ сравнивать иностранныя серебряныя монеты. Но такъ какъ французскія метрическія мѣры все болѣе и болѣе входятъ во всеобщее употребленіе, то неизлишне будетъ здѣсь прибавить, что русскій серебряный рубль равняется по вѣсу 17,9961135 французскимъ грамамъ чистаго серебра.

Изъ европейскихъ серебряныхъ монетъ болѣе употребительны какъ въ Россіи, такъ и въ международныхъ торговыхъ сношеніяхъ, слѣдующія: новая нѣмецкая марка (въ Германской имперіи), прежній сѣверогерманскій талеръ, южно-германскій гульденъ, австрійскій гульденъ, франкъ (во Франціи, Италія, Бельгіи и Швейцаріи), голландскій гульденъ, англійскій шиллингъ, скандинавская крона и новый норвежскій спецiесъ-талеръ. Какъ нынѣшняя нѣмецкая марка, такъ франки и шиллингъ близко подходятъ величиною и вѣсомъ къ нашему прежнему четвертаку 84-й пробы. Вотъ отношенія русская серебрянаго рубля къ этимъ иностраннымъ монетамъ: 1 руб. сер. = 3 маркамъ 23,93 пфеннигамъ новой германской монетной системы = 1 талеру, 2,393 зильбергрошамъ прежней системы = 1 гульдену 61,965 нейкрей-

церамъ австрійскимъ = 1 гульдену 90,435 центамъ голландскимъ = 3 ф. 99,914 сантимамъ (или почти 4 франкомъ) французской, бельгійской, итальянской и швейцарской денежныхъ системъ, = 3 шиллингамъ 2,054 пенсамъ англійской = 2,879 скандинавскимъ кронамъ = 2,823 рейхсталерамъ или 2 рейхсталерамъ 82,285 оре прежней шведской системы.

Золотыя монеты.

Указомъ 14 февраля 1817 г. установлено у насъ чеканить *полуимперіалъ* или въ просторѣчіи *золотой* (единственная у насъ золотая монета) 88-й пробы; т. е. чтобы въ фунтѣ монеты было 88 золотниковъ чистаго золота и 12 золотниковъ лигатуры: или чтобы на 1000 частей считалось $916^2/_3$ частей чистаго золота. Такимъ образомъ изъ фунта золота чеканится $62^{26}/_{45}$ полуимперіала, что на каждой приходится по 1 золотнику $51^3/_{11}$ доли вѣса или 6,544 грамовъ.

Австрійскій суверендоръ двойной . .	=	8,7	руб.	сер.
Испанскій дублонъ.	=	19,92	»	»
Французская монета въ 40 франковъ.	=	9,84	»	»
Французская монета въ 20 франковъ.	=	4,92	»	»
Голландскій червонецъ	=	2,95	»	»

V. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ линейныхъ мѣръ.*

Рус. или англ. футъ.	Рижскій локоть.	Польскій футъ.	Англійскій ярдъ.	Французск. туазъ.	Метръ.	Рейнланд. или прусскій футъ.
1 =	0,56695	1,05960	$^1/_3$	0,15638	0,30479	0,97114
1,76383	= 1 =	1,86897	0,58794	0,27583	0,53761	1,71292
0,94375	0,53506	= 1 =	0,31458	0,14759	0,28765	0,91651
3	1,70084	3,17881	= 1 =	0,46915	0,91438	2,91341
6,39459	3,62539	6,77573	2,13153	= 1 =	1,94904	6,21002
3,28090	1,86010	3,47645	1,09363	0,51307	= 1 =	3,18620
1,02972	0,58380	1,09110	0,34324	0,16103	0,31385	= 1

VI. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ путевыхъ мѣръ.*

Градусъ экватора.	Нѣмецкая или геогр. миля.	Русская верста.	Англійск. миля.	Морская или итал. миля.	Миріаметръ.	Французск. почт. миля.
1 =	15	104,3388	69,1640	60	11,1307	25
1/15	= 1 =	6,95592	4,61093	4	0,74204	$1^2/_3$
0,0095842	0,14376	= 1 =	0,66288	0,57505	0,10668	0,23960
0,0144584	0,21688	1,50857	= 1 =	0,86750	0,16093	0,36146
1/60	1/4	1,73898	1,15273	= 1 =	0,18551	5/12
0,0898419	1,34763	9,3400	6,21382	5,39652	= 1 =	2,24605
1/25	3/5	4,17355	2,76656	$2^2/_5$	0,44523	= 1

Примѣчаніе.

1 географическая миля = 3807,23 туаз. = 24345,7 англ. футамъ.
1 англійская миля = 1760 ардамъ.
1 французская миля = 2234,34 туаз. = 14607,4 англ. футамъ.
1 морск. миля=951,81 туаз.=6086,43 англ. фут.=869,49 саж.
3 морскія мили составляютъ 1 морскую лигу, какъ во Франціи, такъ и въ Англіи, такъ что 20 лигъ считается въ градусѣ экватора.

VII. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ мѣръ емкости для сыпучихъ тѣлъ.*

Четверикъ.	Риж. лофъ.	Гекто-литръ.	Галлонъ.	Прусскій шефель.
1 =	0,3810	0,2624	5,7748	0,4774
2,6250	= 1=	0,6887	15,1589	1,2531
3,8113	1,4519	= 1=	22,0097	1,8195
0,1732	0,0660	0,0454	= 1 =	0,0827
2,0948	0,7980	0,5496	12,0968	= 1

Примѣчаніе.

1 четверикъ = $2^2/_{15}$ ведра.
1 рижскій лофъ = 54 рижскимъ штофамъ.
1 прусскій шефель = 1/5 прусскаго ведра.

VIII. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ мѣръ емкости для жидкихъ тѣлъ.*

Русское ведро.	Рижскій штофъ.	Гекто-литръ.	Галлонъ.	Прусскій эймеръ.
1 =	9,6429	0,1230	2,7070	0,1790
0,1037	= 1 =	0,0128	0,2807	0,0186
8,1308	78,4040	= 1=	22,0097	1,4556
0,3694	3,5622	0,0454	= 1 =	0,0661
5,5860	53,8649	0,6870	15,1210	= 1

Примѣчаніе.

1 русское ведро должно содержать въ себѣ 30 фунт. перегнанной воды при $13^1/_3$ град. Реом., взвѣшенной въ безвоздушномъ пространствѣ. Количество такой воды = 750,5679 рус. кубическимъ дюймамъ.

1 гектолитръ = 100 куб. дециметрамъ.

1 галлонъ = 277,2738 англ. куб. дюймамъ.

1 прусск. ведро = 3840 прус. куб. дюймамъ.

$9^1/_3$ русск. ведра = 90 рижскимъ штофамъ.

IX. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ поземельныхъ мѣръ.*

Десятина.	Лифлянд. Loofstelle.	Arpent.	Гектаръ.	Англ. экръ.	Прусскій моргенъ.
1 =	2,94000	3,19550	1,09250	2,69972	4,27890
0,34014	= 1 =	1,08691	0,37160	0,91827	1,45541
0,31294	0,92004	= 1 =	0,34189	0,84485	1,33904
0,91533	2,69108	2,92494	= 1 =	2,47114	3,91662
0,37041	1,08900	1,18364	0,40467	= 1 =	1,58494
0,23370	1,68709	0,74680	0,25532	0,63094	= 1

Примѣчаніе.

Loofstelle = 10,000 квадр. земл. локтямъ. Земл. локоть = 24 квад. рус. дюймамъ. Arpent = 900 кв. туазамъ.

Гектаръ = 100 арамъ = 10,000 квад. метрамъ.

Англ. экръ = 4840 кв. ярдамъ. Прус. моргенъ = 180 прусск. рутамъ. Прусск. рута = 12 прус. футамъ.

X. *Сравнительная таблица главнѣйшихъ мѣръ вѣса.*

Рус. фунтъ.	Рижскій фунтъ.	Польскій фунтъ.	Англійскій тройск. ф.	Кило-граммъ.	Прусскій фунтъ.	Кельнская марка.
1 =	0,97775	1,01056	1,09718	0,40952	0,87558	1,75116
1,02276	= 1 =	1,03356	1,12215	0,41884	0,89551	1,79102
0,98955	0,98753	= 1 =	1,08572	0,40521	0,86643	1,75287
0,91142	0,89114	0,92105	= 1 =	0,37324	0,79803	1,59605
2,44190	2,38756	2,46768	2,67921	= 1 =	2,13808	4,27616
1,14210	1,11668	1,15415	1,25309	0,46771	= 1 =	2
0,57105	0,55834	0,57708	0,62655	0,23385	0,5	= 1

Примѣчаніе.

1 бременскій фунтъ = 1 ф. 20 зол. 84,43 дол. русскаго вѣса.
½ ока волошскаго = 1 ф. 54 зол. 42,2 дол.
1 большой венеціянскій фунтъ = 1 ф. 15 зол. 81,27 дол.
1 вѣнскій фунтъ = 1 ф. 35 зол. 27,13 дол.
1 гамб. фунтъ торг. вѣса = 1 ф. 17 зол. 57,91 дол.
1 гамб. марко банко = 54 зол. 78,80 дол.
1 гамб. центнеръ = 132 ф. 51 зол. 54,28 дол.
1 испанскій фунтъ = 1 ф. 11 зол. 66,59 дол.
1 китайскій казенный фунтъ = 1 ф. 43 золот.
1 » торговый фунтъ = 1 ф. 40 золот.
1 » малый фунтъ = 1 ф. 39 золот.
1 констант. око = 3 ф. 13 зол. 35,4 дол.
1 лиссабонскій фунтъ = 1 ф. 11 зол. 57,59 дол.
1 любскій фунтъ = 1 ф. 17 зол. 60,32 дол.
1 молдавское око = 3 ф. 15 зол. 10,3 дол.
1 нидерланд. фунтъ = 2 ф. 42 зол. 46 дол.
1 норвежскій фунтъ = 1 ф. 20 зол. 73,9 дол.
1 нюренбергскій фунтъ = 1 ф. 23 зол. 58,24 дол.
1 нюренбергскій центн. = 124 ф. 56 зол. 63 дол.
1 прусскій фунтъ = 1 ф. 13 зол. 61,57 дол.
1 кельнская марка = 54 зол. 78,59 дол.
1 прусскій центнеръ = 125 ф. 60 зол. 53 дол.
1 рижскій фунтъ = 1 ф. 2 зол. 17,74 дол.
1 финляндскій фунтъ = 1 ф. 3 зол. 62,42 дол.
1 шведскій фунтъ = 1 ф. 3 зол. 62,42 дол.
1 шведскій центнеръ = 124 ф. 53 зол. 90 дол.
1 шифъ-фунтъ = 415 ф. 20 зол. 8 дол.

§ 32.

СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

а. Сложеніе десятичныхъ дробей потому гораздо проще сложенія простыхъ дробей, что оно не нуждается даже въ приведеніи ихъ къ одному знаменателю: здѣсь прямо слагаются, напримѣръ, тысячныя съ тысячными, сотыя съ сотыми, десятыя съ десятыми, и изъ частныхъ суммъ составляется одна общая. Разовьемъ это въ примѣрахъ.

Воп. Что составляетъ 2,7 и 039?

Отв. 3,09. Смѣшанное число 2,7 = 2 + 0,7; 0,39 = 0,3 + 0,09; 0,7 + 0,3 = 10 десятымъ или одному цѣлому. Итакъ 2 + 1 + 0,09 = 3,09.

Воп. Сложите дроби: 0,028, 0,95 и 0,8.

Отв. 0,028 = 0,02 + 0,008; 0,95 = 0,9 + 0,05: 0,9 + 08, = 17 десятымъ = 1,7; 0,02 + 0,05 = 0,07; 1,7 + 0,07 = 1,77; 1,76 + 0,008 = 1,778.

Какъ же здѣсь поступлено въ исчисленіи?

Сперва сложены десятыя доли во всѣхъ трехъ данныхъ слагаемыхъ, что и составило всего 17 десятыхъ, или 1 цѣлое и 7 десятыхъ; потомъ сложены вмѣстѣ сотыя, и получено всего 7 сотыхъ; сумма сотыхъ приложена къ суммѣ десятыхъ частей, что и дало 1,77; наконецъ къ общей суммѣ прибавлено еще 8 тысячныхъ. Такимъ образомъ и получено въ общей суммѣ всего 1,778.

Можно было бы начать сложеніе съ меньшихъ частей, и потомъ восходить постепенно къ большимъ.

Что же касается до удобности исчисленія при сложеніи нѣсколькихъ десятичныхъ дробей, выраженныхъ большими числами, то здѣсь надобно поступать точно также, какъ и при сложеніи большихъ цѣлыхъ чиселъ, а именно: подписать одну десятичную дробь подъ другую такъ, чтобы цифры, выражающія однородныя части, находились въ одномъ ряду; провести подъ послѣднимъ слагаемымъ черту, и потомъ складывать каждый разъ однородныя части, начиная съ самыхъ меньшихъ частей, т. е. съ цифръ, всего далѣе отстоящихъ отъ запятой.

Если отъ сложенія какого-либо ряда однородныхъ частей, положимъ сотыхъ, произойдетъ число болѣе 9, положимъ 13, то это явный знакъ, что въ этой суммѣ содержится одна или нѣсколько ча-

стей непосредственно высшаго разряда, которыя потому и должно отнести къ принадлежащему имъ разряду. Такъ въ 13 сотыхъ содержатся 10 сотыхъ и еще 3 сотыя; но $^{10}/_{100}$ все равно, что $^{1}/_{10}$, поэтому $^{1}/_{10}$ должно присовокупить къ частямъ слѣдующаго высшаго разряда, а подъ чертою въ ряду сотыхъ поставить только 3.

Воп. Найдите сумму дробей: 0,27 + 1,7 + 0,0073 + 53,67891 + 0.1236769.

Отв. Подписываемъ сперва одну дробь подъ другую такимъ образомъ, чтобъ однородныя части находились въ одномъ ряду; подъ послѣднимъ слагаемымъ проводимъ черту, и начинаемъ складывать съ перваго ряда отъ правой руки къ лѣвой, какъ при сложеніи цѣлыхъ чиселъ. Дѣйствіе расположится такъ:

$$
\begin{array}{r}
0,27 \\
1,7 \\
0,0073 \\
53,67891 \\
0,1236769 \\
\hline
55,7898869
\end{array}
$$

Рѣшеніе. Девять десяти-милліонныхъ частей перваго ряда съ правой руки пишемъ подъ чертою (въ седьмомъ ряду отъ запятой), безъ всякаго измѣненія, потому что въ прочихъ слагаемыхъ дробяхъ нѣтъ однороднымъ съ ними частей; то же самое дѣлаемъ и съ 6 милліонными, которыя займутъ мѣсто съ лѣвой стороны десяти-милліонныхъ частей. 1 стотысячная четвертой слагаемой дроби и 7 стотысячныхъ пятой слагаемой дроби составляютъ вмѣстѣ 8 стотысячныхъ, которыя пишутся подъ чертою съ лѣвой руки цифры 6. Десяти-тысячныхъ частей во всѣхъ числахъ 18 (3 + 9 + 6); но 18 десяти-тысячныхъ все равно, что 1 тысячная и 8 десяти-тысячныхъ; слѣдовательно подъ чертою въ четвертомъ ряду пишемъ только 8, а 1 тысячную присовокупляемъ къ тысячнымъ. Тысячныхъ частей во всѣхъ дробяхъ всего также 18 (7 + 8 + 3), къ которымъ если приложить 1 тысячную, происшедшею отъ совокупленія десяти-тысячныхъ, то выйдетъ 19 тысячныхъ, или сотая и 9 тысячныхъ. Итакъ подъ чертою, въ третьемъ ряду отъ запятой, должно написать 9, а 1 сотую удержать въ умѣ: По сложеніи сотыхъ (7 + 7 + 2) вмѣстѣ съ удержанною въ умѣ сотою, узнаемъ, что сотыхъ выйдетъ всего 17, или 1 десятая и 7 сотыхъ. 7 сотыхъ подписываемъ подъ сотыми, а 1 десятую удерживаемъ въ умѣ. Всего десятыхъ, вмѣстѣ

съ полученною отъ сложенія сотыхъ, получится 17, или, что все равно, 7 десятыхъ и 1 цѣлое. Слѣдовательно подъ чертою въ ряду десятыхъ пишемъ цифру 7; но какъ тутъ кончаются десятичныя части, то предъ этою цифрою ставимъ запятую. Теперь переходимъ къ сложенію цѣлыхъ, которыхъ всего, вмѣстѣ съ полученною единицею отъ десятичныхъ частей, 55; эту сумму ставимъ съ лѣвой стороны запятой.

Ясно, что сложеніе десятичныхъ дробей ничѣмъ не разнствуетъ отъ сложенія цѣлыхъ чиселъ.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ СЛОЖЕНІИ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

1) 2,5 руб.
3,4 »

2) 17,3 коп.
8,9 »

3) 17,516
28,147
13,023

4) 5,23 + 4,11 + 3,34 = ?

5) 2,032 + 0,516 + 11,141 = ?

6) 4,12 руб.
3,25 »
7,11 »
8,01 »

7) 2,00428
2,12765
0,00943
1,23479

8) 17,0281
5,9876
0,7567
3,0279
37,9876
0,1728

9) 0,00213 + 7,34156 + 5,00283 = ?

10) 7,31 + 8,29 + 0,01 + 17,59 + 8,36 + 4,02 + 1,11 + 9,99 = ?

11) 7,5
6,12

12) 2,1
0,57

13) 4,3
2,49

14) 1,59
12,4
3,607

15) 23,473
6,1
127,58

16) 2,3
13,45
246,871
1029,3456

17) 5041,2781
345,684
23,11
0,7

18) 417,581762
59,78143
0,835
1769,123456
49,4781

19) 4,002 + 0,0001 + 5149,2 + 0,00291 + 14367,051 + 0,03 = ?

20) Нѣкто получилъ 100-ю долю отъ 25628 рублей, а потомъ 10-ю долю 1027,49 рублей. Сколько онъ получилъ всего?

21) Найти четыре дроби, которыхъ сумма была бы равна 0,9871.

22) 3 фута 2 дюйма 4,4 линіи
9 » 5 » 3,5 »

23) 45 руб. 2,7 гривн.
9 » 5,2 »

24) 5 саж, 1 фут. 3 дюйм. 2,417 лин.
3 » 2 » 6 » 5,029 »
4 » 3 » 7 » 0,182 »

25) 5 пудъ 7,625 фунт.
6 » 18,75 »
11 » 3,125 »

b. Такъ же легко производить и вычитаніе десятичныхъ дробей. Два, три примѣра лучше всего объяснятъ дѣло.

Воп. Что останется, если изъ 2,53 вычесть 1,47?

Отв. Останется 1,06. Въ этомъ примѣрѣ изъ 5 десятыхъ и 7 сотыхъ требуется вычесть 4 десятыя и 7 сотыхъ; такъ какъ 7 сотыхъ болѣе 3 сотыхъ, то, чтобъ возможно было произвести вычитаніе, отъ 5 десятыхъ займемъ одну десятую, обратимъ ее въ сотыя и приложимъ послѣднія къ 3 сотымъ уменьшаемаго числа. 13 сотымъ — 7 сотыхъ = 6 сотымъ; 4 десятыхъ — 4 десятыхъ = 0; да кромѣ того вычтя изъ двухъ единицъ одну, получимъ въ остаткѣ 1. Сложивъ теперь всѣ остатки, получимъ 1+0,6 или 1,6.

Воп. Вычесть изъ 3,7 смѣшанное число 1,895.

Отв. Прежде всего приведемъ обѣ дроби къ одинаковому знаменателю, что и будетъ сдѣлано, если по правую сторону цифры 7 уменьшаемаго числа припишемъ два нуля (черезъ что, какъ извѣстно, дробь измѣнитъ только видъ свой, а не величину). Но какъ изъ 700 тысячныхъ нельзя вычесть 895 тысячныхъ, то отъ 3 цѣлыхъ занимаемъ единицу и приводимъ ее въ тысячныя: 1 единица = 1000 тысячнымъ; 1000 тысячныхъ + 700 тысячныхъ = 1700 тысячныхъ. Итакъ 3,7 = 2 единицамъ + 1700 тысячнымъ, а 1700 тысячныхъ можно разложить еще и такъ: 1600 тысячныхъ + 90 тысячныхъ + 10 тысячныхъ. Отсюда легко теперь вычесть 5 тысячныхъ + 90 тысячныхъ + 800 тысячныхъ. Очевидно, что въ остаткѣ получится 5 ты-

сячныхъ и 800 тысячныхъ, или 8 десятыхъ, т. е. всего 0,895; но какъ при вычитаемой дроби находится еще 1, то полный остатокъ будетъ равенъ 1,805. Дѣйствіе это письменно должно произвести такимъ образомъ:

```
  3,700
  1,895
  -----
  1,805
```

т. е. здѣсь наблюдается совершенно тотъ же порядокъ, какъ и при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ.

Примѣры.

a) Изъ 87 вычесть 59,617.

```
 87,0·0·0
 59,6 1 7
 --------
 27,3 8 3
```

b) Изъ 23 вычесть 0,0359.

```
 23,0000
  0,0359
 -------
 22,9641
```

c) Изъ суммы чиселъ: 2,3765 + 0,9 + 17,205 + 0,01 вычесть сумму чиселъ: 3,987 + 2,0039 + 1,234567.

```
  2,3765
  0,9                                3,987
 17,205          20,491500           2,0039
  0,01            7,225467           1.234567
 -------         ---------           --------
 20,4915         13,266033           7,225467
```

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ ВЫЧИТАНІИ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

```
1)   3,4 фунт.        2)   7,4121 лин.       3)   2,0403
    —2,3   »              —0,2345  »             —1,0378
```

```
4)   15 фут. 11 дюйм. 4,5 лин.
    — 7  »    5   »   2,3  »
```

5) 8,021 руб. — 5,718 руб. = ?

6) Австрійскій суверендоръ двойной = 8,70 руб. сереб, а голландскій червонецъ = 2,95 руб. сер. Сколькими рублями двойной австрійскій суверендоръ болѣе червонца?

7) Чѣмъ испанскій дублонъ болѣе прежней прусской золотой монеты въ 10 талеровъ достоинствомъ, когда первый = 19,92 руб. сер., а вторая = 10,23 руб. сер.?

8) Сравнить съ россійскимъ серебрянымъ рублемъ иностранные талеры: австрійскій (въ 1 руб. 28,25 коп.), голландскій (въ 1 руб. 33,5 к.), прусскій (въ 91,25 к.) и шведскій (въ 1 руб. 41,5 к.) и найти ихъ разности.

9) Чѣмъ русскій футъ менѣе рейнландскаго или прусскаго, когда въ послѣднемъ считается 1,02972 русск. фута?

10) Въ одной географической мили считается 24345,6 англійскихъ футовъ, а въ одной французской мили 14607,4 англ. футовъ. Сколькими футами географическая миля болѣе французской?

11) 30,1
— 19,87654

12) 3,21 руб. сер.
— 2,98765

13) Французскій метръ = 3,2809 русск. фута, а 1 русск. арш. = 2,33333 русск. фута. Чѣмъ французск. метръ болѣе русск. аршина?

14) Англійскій торговый фунтъ имѣетъ въ себѣ 1,10763 русск. фунта, а килограммъ = 2,4419 русск. фунта. Чѣмъ килограммъ болѣе англійскаго торговаго фунта?

15) Морская или италіянская миля = 869,49 русск. саженямъ. Сколькими саженями она болѣе русск. версты?

§ 33.

УМНОЖЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

Здѣсь должно разсмотрѣть три случая: 1) умноженіе дроби на цѣлое число; 2) умноженіе цѣлаго числа на дробь, и 3) умноженіе дроби на дробь.

а. Умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число.

1) Умножить дробь 0,2 на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ увеличить $^2/_{10}$ въ 2, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д. Отсюда получаемъ произведенія: $^4/_{10}$, $^6/_{10}$, $^8/_{10}$, $^{10}/_{10}$, $^{12}/_{10}$, $^{14}/_{10}$ и т. д., которыя безъ знаменателей выражаются такъ: 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4 и т. д. Сравнивая между собою полученныя произведенія со множимымъ дробнымъ числомъ, находимъ, что

0,4	вдвое болѣе	0,2
0,6	втрое болѣе	0,2
0,8	вчетверо болѣе	0,2
1	впятеро болѣе	0,2
1,2	вшестеро болѣе	0.2
1,4	всемеро болѣе	0,2 и т. д.

т. е. получимъ искомыя числа одно за другимъ, если каждый разъ числителя дроби увеличимъ во столько разъ, сколько единицъ во

множителѣ, и полученное такимъ образомъ произведеніе уменьшимъ въ 10 разъ. Такъ 0,8 (происшедшее отъ умноженія 0,2 на 4) есть тоже, что $\frac{4 \times 2}{10}$.

2) Умножить дроби: 0,3 (3/10), 0,4 (4/10), 0,5 (5/10), 0,6 (6/10), 0,7 (7/10), 0,8 (8/10), 0,9 (9/10), на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ тоже, что увеличить ихъ числителей въ 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д.

Это можно представить послѣдовательными рядами:

1) $0,3 \times 2 = 0,6$	2) $0,4 \times 2 = 0,8$	3) $0,5 \times 2 = 1,$
$0,3 \times 3 = 0,9$	$0,4 \times 3 = 1,2$	$0,5 \times 3 = 1,5$
$0.3 \times 4 = 1,2$	$0,4 \times 4 = 1,6$	$0,5 \times 4 = 2,$
$0,3 \times 5 = 1,5$	$0,4 \times 5 = 2,$	$0,5 \times 5 = 2,5$
$0,3 \times 6 = 1,8$	$0,4 \times 6 = 2,4$	$0,5 \times 6 = 3,$
$0,3 \times 7 = 2,1$	$0,4 \times 7 = 2,8$	$0,5 \times 7 = 3,5$
и т. д.	и т. д.	и т. д.
4) $0,6 \times 2 = 1,2$	5) $0,7 \times 2 = 1,4$	6) $0,8 \times 2 = 1,6$
$0,6 \times 3 = 1,8$	$0,7 \times 3 = 2,1$	$0,8 \times 3 = 2,4$
$0,6 \times 4 = 2,4$	$0,7 \times 4 = 2,8$	$0 8 \times 4 = 3,2$
$0,6 \times 5 = 3,$	$0,7 \times 5 = 3,5$	$0,8 \times 5 = 4,$
$0,6 \times 6 = 3,6$	$0,7 \times 6 = 4,2$	$0,8 \times 6 = 4,8$
$0,6 \times 7 = 4,2$	$0,7 \times 7 = 4,9$	$0,8 \times 7 = 5,6$
и т. д.	и т. д.	и т. д.
	7) $0,9 \times 2 = 1,8$	
	$0,9 \times 3 = 2,7$	
	$0,9 \times 4 = 3,6$	
	$0,9 \times 5 = 4,5$	
	$0,9 \times 6 = 5,4$	
	$0,9 \times 7 = 6,3$	
	и т. д.	

Въ предложенныхъ рядахъ, десятыя части единицы увеличиваются въ 2, 3, 4, 5 разъ и т. д. и въ произведеніи получаются тоже десятыя. Слѣдовательно умножить, напримѣръ, 0,3 на 2 — все равно, что умножить 3 на 2 и потомъ показать, что произведеніе 6 не есть цѣлое число, а выражаетъ десятыя части; т. е. предъ 6 должно поставить нуль съ запятою, вотъ такъ: 0,6. Умножить 0,3 на 8—все тоже, что умножить 3 на 8 и полученное произведеніе уменьшить въ 10 разъ; то есть $0,3 \times 8 = \frac{3 \times 8}{10} = 2,4$.

Задача. Умножить 0,7 на 13.

Рѣшеніе. Умножить 0,7 на 13 все тоже, что 7 десятыхъ взять 13 разъ; оттого въ произведеніи должны произойти тоже десятыя части. Итакъ просто помножаемъ 7 на 13, что дастъ 91. Но черезъ это получили въ произведеніи въ 10 разъ большее число, нежели какое должно быть, ибо не 7 един., а 7 десятыхъ множатся на 13. Поэтому 91 не есть цѣлое число, а выражаетъ только десятыя части. Чтобы показать это, ставимъ запятую между цифрами 9 и 1, вотъ такъ: 9,1. Дѣйствительно, $^7/_{10} \times 13 = {^{91}/_{10}} = {^{90}/_{10}} + {^1/_{10}} = 9,1$.

Во всѣхъ произведеніяхъ предыдущихъ рядовъ находимъ по одному десятичному знаку; т. е. по столько, сколько ихъ находится въ каждомъ множимомъ числѣ.

Задача. Помножить 4,7 на 12.

Рѣшеніе. 4,7 все тоже, что 47 десятыхъ; увеличивъ 47 десятыхъ въ 12 разъ, получаемъ 564 десятыя, или 56 цѣлыхъ и 4 десятыя, т. е. 56,4.

Тотъ же результатъ получимъ, если, *не обращая вниманія на запятую, примемъ оба числа за цѣлыя, умножимъ ихъ одно на другое и въ полученномъ произведеніи* (564) *отдѣлимъ запятою, отъ правой руки къ лѣвой, одну цифру для десятичныхъ долей, т. е. столько, сколько находится десятичныхъ знаковъ во множимомъ числѣ.*

3) Умножить дроби: 0,01 ($^1/_{100}$), 0,02 ($^2/_{100}$), 0,03 ($^3/_{100}$), 0,04 ($^4/_{100}$) и т. д. на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ увеличить ихъ числителей, въ 2, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д.

Представимъ полученныя произведенія послѣдовательными рядами:

1) 00,1 × 2 = 0,02
0,01 × 3 = 0,03
0,01 × 4 = 0,04
и т. д.

2) 0,02 × 2 = 0,04
0,02 × 3 = 0,06
0,02 × 4 = 0,08
и т. д.

3) 0,09 × 2 = 0,18
0,09 × 3 = 0,27
0,09 × 4 = 0,36
0,09 × 5 = 0,45
0,09 × 6 = 0,54
0,09 × 7 = 0,63
0,09 × 8 = 0,72
0,09 × 9 = 0,81
0,09 × 10 = 0,90
0,09 × 11 = 0,99
0,09 × 12 = 1,08 и проч.

Въ приведенныхъ рядахъ сотыя части увеличиваются, а поэтому въ произведеніяхъ получаются тѣ же сотыя части. Такъ умножить

0,09 на 9 все равно, что повторить $^{9}/_{100}$ девять разъ. Очевидно, что получимъ 81 сотую.

Задача. Найти произведеніе 0,17 на 13.

Рѣш. 17 сотыхъ, увеличенныя въ 13 разъ, даютъ 221 сотую, а это все равно, что $^{200}/_{100} + ^{21}/_{100}$ или 2 цѣл. $^{21}/_{100}$, или 2,21. Тотъ же результатъ получимъ, если, *не обращая вниманія на запятую, примемъ оба числа* (здѣсь 17 и 13) *за цѣлыя, умножимъ ихъ одно на другое, и въ полученномъ произведеніи* (221) *отдѣлимъ запятою, отъ правой руки къ лѣвой, двѣ цифры для десятичныхъ долей, т. е. столько, сколько находится десятичныхъ знаковъ во множимомъ числѣ.*

Примѣры.

$$0{,}23 \times 15 = ?$$
$$4{,}05 \times 19 = ?$$
$$15{,}01 \times 213 = ?$$

Задача. Умножить 0,009 на 18.

Рѣш. Умножаемъ 9 на 18, не обращая вниманія на запятую, и полученное произведеніе уменьшаемъ въ 1000 разъ, потому что не 9 единицъ, а 9 тысячныхъ частей слѣдовало умножить на 18. Итакъ произведеніе 162 въ 1000 разъ болѣе настоящаго. Чтобы показать, что число 162 означаетъ тысячныя части, пишемъ такъ: 0,162.

Примѣры.

$$0{,}003 \times 198 = ?$$
$$0{,}132 \times 17 = ?$$
$$4{,}596 \times 35 = ?$$
$$0{,}00009 \times 142 = ?$$
$$0{,}20546 \times 11 = ?$$
$$8{,}1234567 \times 92 = ?$$

Изъ всѣхъ приведенныхъ примѣровъ выводимъ правило:

Чтобъ умножить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на цѣлое число, должно множимое принять за цѣлое, т. е. не обращать вниманія на запятую, и потомъ поступать по правиламъ умноженія цѣлыхъ чиселъ; наконецъ въ полученномъ произведеніи отдѣлить отъ правой руки къ лѣвой столько цифръ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ во множимомъ числѣ.

b. Умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

Задача 1. *Умножить 29 на 0,15.*

Рѣшеніе. Не обращая вниманія на запятую, принимаемъ множителя за цѣлое число и умножаемъ 29 на 15, что и дастъ въ произведеніи 435. Но произведеніе 435 во столько разъ болѣе произведенія 29 на 0,15, во сколько разъ число 15 болѣе 0,15, т. е. въ 100 разъ. Итакъ, чтобы получить искомое произведеніе, должно число 435 уменьшить во 100 разъ, или, все тоже, отдѣлить въ немъ, отъ правой руки къ лѣвой, двѣ цифры для десятичной дроби. Слѣдственно, $29 \times 0{,}15 = 29 \times {}^{15}/_{100} = {}^{435}/_{100} = 4^{35}/_{100} = 4{,}35$.

Задача 2. *Найти произведеніе двухъ чиселъ: 78 на 0,0009.*

Рѣшеніе. 78 надобно умножить на 9 и полученное произведеніе уменьшить въ 10000 разъ, потому что 9 въ 10000 разъ болѣе дроби 0,0009. Дѣйствіе располагается такъ:

$$\begin{array}{r} 78 \\ 0{,}0009 \\ \hline 0{,}0702 \end{array}$$

Произведеніе 78 на 9 = 702; но его надобно уменьшить въ 10000 разъ; слѣдовательно запятую должно поставить черезъ 4 цифры отъ правой руки къ лѣвой. Но какъ въ числѣ 702 только три цифры, то, чтобы запятая стояла на своемъ мѣстѣ, предъ цифрою 7 поставимъ нуль.

Задача 3. *Умножить 519 на 3,081.*

Рѣшеніе. Дѣйствіе изображается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 519 \\ 3{,}081 \\ \hline 519 \\ 4152 \\ 1557 \\ \hline 1599{,}039 \end{array}$$

Множитель $3{,}081 = {}^{3081}/_{1000}$. Поэтому, по умноженіи числа 519 на 3081, полученное произведеніе должно уменьшить въ 1000 разъ. Мы достигнемъ этого, если въ найденномъ произведеніи отдѣлимъ, отъ правой руки къ лѣвой, три знака для десятичной дроби, т. е. столько, сколько ихъ находится во множителѣ.

Изъ предложенныхъ задачъ выводимъ правило:

Чтобъ умножить цѣлое число на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, должно множителя принять за цѣлое число; потомъ, по нахожденіи произведенія изъ двухъ данныхъ чиселъ, отдѣлить отъ послѣдняго столько десятичныхъ знаковъ, отъ правой руки къ лѣвой, сколько ихъ находится во множитель.

с. Умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичною дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

Задача 1. *Умножить 0,7 на 0,9.*

Рѣшеніе. 0,7 = $^7/_{10}$; 0,9 = $^9/_{10}$; $^7/_{10} \times ^9/_{10} = ^{63}/_{100}$ = 0,63. Ясно, что если вмѣсто 0,7 возьмемъ 7 единицъ, а вмѣсто 0,9 — 9 единицъ, то какъ множимое, такъ и множитель будутъ увеличены въ 10 разъ. Значитъ, что произведеніе изъ 7 на 9, т. е. 63, болѣе настоящаго въ 10 × 10 или въ 100 разъ. Поэтому, чтобы получить настоящее произведеніе, необходимо число 63 уменьшить въ 100 разъ, что и сдѣлается, если въ числѣ 63 отдѣлимъ, отъ правой руки къ лѣвой, два десятичныхъ знака, вотъ такъ: 0,63.

Задача 2. *Умножить 0,014 на 0,19.*

```
 0,014
  0,19
 -----
   126
   14
-------
0,00266
```

Рѣшеніе. 0,014 = $^{14}/_{1000}$; 0,19 = $^{19}/_{100}$; $^{14}/_{1000} \times ^{19}/_{100} = ^{266}/_{100000}$ = 0,00266. Принимая множимое за цѣлое, получаемъ 14 единицъ: принимая такимъ же образомъ множителя за цѣлое, получаемъ 19 единицъ; 14 × 19 = 266. Но 14 единицъ въ 1000 разъ болѣе дроби 0,014; 19 ед. въ 100 разъ болѣе дроби 0,19. Отсюда видно, что взятыя нами сомножители болѣе настоящихъ, одинъ въ 1000 разъ, а другой въ 100 разъ; слѣдовательно и произведеніе 266 болѣе настоящаго въ 100 × 1000 разъ. Значитъ, чтобы получить настоящее произведеніе, надобно число 266 уменьшить въ 100000 разъ, чего и достигнемъ, если отдѣлимъ въ немъ пять десятичныхъ знаковъ, т. е. *столько, сколько ихъ находится во множимомъ и множителѣ.* Разумѣется, что въ предлежащемъ примѣрѣ, для полученія требуемаго, надобно между нулемъ съ запятою и числомъ 266 вставить два нуля.

Задача 3. *Умножить 9,123 на 4,015.*

```
    9,123
    4,015
   ------
    45615
    9123
  36492
 ---------
 36,628845
```

Теперь можно сказать вообще:

Чтобъ умножить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичною дробью, надобно оба числа принять за цѣлыя (т. е. не обращать вниманія на запятыя), и помножать ихъ одно на другое по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Потомъ въ полученномъ произведеніи отдѣлить

запятою столько десятичныхъ знаковъ, отъ правой руки къ лѣвой, сколько ихъ всего находится въ обоихъ данныхъ сомножителяхъ.

§ 34.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ УМНОЖЕНІИ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

1) $7,24 \times 8 = ?$ 2) $18,40003 \times 2,9 = ?$
3) $5,12007 \times 4,103 = ?$ 4) $2,08 \times 1,6 \times 2,59 = ?$
5) $92,1021 \times 45,009 = ?$ 6) $0,249 \times 0,512 = ?$
7) $0,001 \times 0,029 = ?$ 8) $0,000087 \times 0,00034 = ?$

9) Нѣкто закупилъ товару на 517,5 голландскихъ червонцевъ. Насколько рублей сер. онъ закупилъ товару, если каждый червонецъ = 2,95 руб. сер.?

10) Нѣкто имѣетъ иностранными серебряными монетами: 27 австр. талеровъ (каждый въ 1,28 р. сер.), 59 брабантск. талер. (въ 1,39 руб. сер.). 35 голландск. талеровъ (въ 1,34 рубл. серебр.), 26 датскихъ талеровъ (въ 1,38 руб. сер.), 44 испанскихъ піастра (въ 1,33 руб. сер.). 95 прусскихъ талеровъ (въ 91 коп. сер.) и 32 шведскихъ талера (въ 1,42 руб. сер.). Сколько онъ имѣетъ всего въ этихъ монетахъ рублей серебромъ?

11) Сколько за 21 гамбургскій рейхсталеръ банко можно получить русскихъ серебряныхъ рублей, когда каждый гамбургскій рейхсталеръ = 1,444 рубл. серебромъ?

12) Сколько саженъ въ 17 французск. миляхъ, если въ каждой считается 2086,77 саж.?

13) $0,0020309 \times 0,001 \times 0,0239 = ?$

14) 17 пудъ 11,25 фунт. $\times$ 4,51 = ?

15) Отъ 3 саж. 5 фут. 11 дюйм. 0,58 лин. взять $^5/_8$ (0,625) долей.

16) Что составитъ 0,75 франка, когда цѣлый франкъ равняется 0,250228 руб. сер.?

17) Какую часть серебрянаго рубля составляетъ 0,95 турецкаго піастра, когда 1 турецкій піастръ = 0,1 рубл. серебр.?

18) Что составляетъ 0,68 австрійскаго фута, когда цѣлый футъ = 12,4427 русск. дюймовъ?

19) Сколько на 100 русск. десятинъ приходится лифляндскихъ loofstelle. когда въ каждой десятинѣ 2,94 loofstelle?

§ 35.

ДѢЛЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

При дѣленіи десятичныхъ дробей также три случая имѣютъ мѣсто. а именно: 1) дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число; 2) дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, и

3) дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичною дробью, на десятичную дробь, или на цѣлое число съ дробью.

а. Дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число.

а. 1) *Раздѣлить 0,486* на *2.*

Раздѣлить 0,486 на 2 все тоже, что раздѣлить на 2 сперва 4 десятыя, потомъ 8 сотыхъ и, наконецъ, 6 тысячныхъ. Половина отъ 4 десятыхъ составляетъ 2 десятыя; половина отъ 8 сотыхъ — 4 сотыя, а половина отъ 6 тысячныхъ — 3 тысячныя.

Итакъ половина отъ 0,486 составляетъ 243 тысячныя.

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$0{,}486 = 0{,}4 + 0{,}08 + 0{,}006$$
$$0{,}4 : 2 = 0{,}2$$
$$0{,}08 : 2 = 0{,}04$$
$$0{,}006 : 2 = 0{,}003$$
$$\text{слѣд.}, 0{,}486 : 2 = 0{,}243$$

Полученное частное равно 243 тысячнымъ; но черезъ раздѣленіе чиса 486 на 2 получаемъ въ частномъ 243; поэтому ясно, чтобы дробь 0,486 раздѣлить на 2, стоитъ только числителя ея, или число 486, раздѣлить на 2. Очевидно, что въ частномъ получаются такія же части, какія означены въ дѣлимомъ, именно тысячныя.

2) *Раздѣлить дробь 0,963 на 3.*

Рѣшеніе.

$$0{,}963 : 3 = \left\{\begin{array}{l} 0{,}9 : 3 = 0{,}3 \\ 0{,}06 : 3 = 0{,}02 \\ 0{,}003 : 3 = 0{,}001 \end{array}\right.$$
$$0{,}963 : 3 = 0{,}321$$

Третья часть 963 тысячныхъ составляетъ 321 тысячную. Но чтобы получить въ частномъ 321, надобно 963 раздѣлить на 3.

Поэтому раздѣлить данную дробь 0,963 на 3 все равно, что раздѣлить на 3 ея числителя.

Итакъ при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число имѣемъ дѣло съ однимъ числителемъ, съ которымъ поступаемъ какъ съ дѣлимымъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ. Значитъ, что на нуль и запятую не обращается никакого вниманія при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число; однако нуль и запятая показываютъ, какимъ образомъ должно читать число, получаемое въ частномъ.

Еслибъ передъ числомъ 463 не стояло нуля съ запятою, тогда частное означало бы 321 единицу; а теперь оно означаетъ 321 тысячную.

b. 1) *Раздѣлить 2,484 на 4.*

Рѣшеніе. 2,484 все равно, что 2484 тысячныя ($^{2484}/_{1000}$); четвертая часть 2484 тысячныхъ = 621 тысячной. Итакъ раздѣляемъ число 2484 (принявъ его за цѣлое) на 4, и въ полученномъ частномъ, 621, означаемъ тысячныя доли, т. е. пишемъ такъ: 0,621. Принявъ дѣлимое за цѣлое, мы увеличили его въ тысячу разъ противъ даннаго; поэтому и частное, полученное отъ раздѣленія 2484 на 4, также въ тысячу разъ болѣе настоящаго; ибо, при томъ же дѣлителѣ, во сколько разъ увеличится дѣлимое, во столько разъ увеличится и частное. Въ предложенномъ примѣрѣ во столько разъ надобно уменьшить частное 621, во сколько разъ было увеличено дѣлимое, т. е. въ тысячу разъ, — что и сдѣлается, если въ полученномъ частномъ (621) отдѣлимъ, отъ правой руки къ лѣвой, столько знаковъ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ.

Другое рѣшеніе.

$$2{,}484 : 4 = 0{,}621.$$

Требуется 2 цѣлыхъ, 4 десятыя, 8 сотыхъ и 4 тысячныя раздѣлить на 4. Четвертая часть 2 цѣлыхъ менѣе 1; поэтому 2 цѣлыхъ приводимъ въ десятыя доли; 2 ц. = 20 десятымъ; 20 десятыхъ + 4 десятыя = 24 десятымъ. $^1/_4$ отъ 24 десятыхъ = 6 десятымъ. Итакъ пишемъ въ частномъ 6; для показанія же, что этою цифрою означается не 6 един., а 6 десятыхъ, ставимъ передъ нею нуль съ запятою. Четвертая часть 8 сотыхъ = 2 сотымъ. Цифру 2 ставимъ въ частномъ непосредственно за цифрою 6: стоя на второмъ мѣстѣ послѣ запятой слѣва вправо, она и будетъ означать сотыя доли единицы. Наконецъ, четвертая часть 4 тысячныхъ = 1 тысячной, которую и ставимъ въ частномъ за цифрою 2. Слѣдовательно $^1/_4$ числа 2,484 = 0,621.

Поэтому при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число важнѣе всего дать въ частномъ надлежащее значеніе первой цифрѣ послѣ запятой; значеніе же послѣдующихъ за нею цифръ частнаго опредѣлится потомъ само собою.

2) *Раздѣлить 0,0611 на 13.*

Рѣшеніе. Если въ дѣлимомъ нѣтъ цѣлыхъ, то ихъ не можетъ быть и въ частномъ; если въ дѣлимомъ нѣтъ десятыхъ, то и въ частномъ также не можетъ быть десятыхъ, ибо частное должно изображать $^1/_{13}$ дѣлимаго. $^1/_{13}$ отъ 6 сотыхъ не составляетъ ни одной сотой; поэтому въ частномъ не будетъ также и *сотыхъ*. Итакъ обращаемъ 6 сотыхъ въ тысячныя и прилагаемъ къ нимъ 1 тысячную

дѣлимаго, черезъ что получаемъ всего 61 тысячную. Раздѣливъ 61 на 13, получаемъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 9. Полученная для частнаго цифра 4 означаетъ *тысячныя* доли. Чтобы показать это, ставимъ передъ 4 два нуля, потомъ запятую и еще нуль. Нуль передъ запятою замѣнитъ отсутствіе цѣлыхъ чиселъ, два же нуля между запятою и цифрою 4 — отсутствіе десятыхъ и сотыхъ долей единицы. Происшедшій отъ дѣленія остатокъ, именно 9 тысячныхъ, приводимъ въ десяти-тысячныя доли, прилагаемъ къ нимъ 1 десятитысячную дѣлимаго, сумму раздѣляемъ на 13, и находимъ вторую цифру частнаго, именно 7, которую и пишемъ за цифрою 4. Слѣдовательно 0,0611 : 13 = 0,0047.

c. *Раздѣлить 1,7269 на 45.*

Первое рѣшеніе. Единица дѣлимаго не можетъ быть раздѣлена нацѣло на дѣлителя 45; поэтому 1 дѣлимаго приводимъ въ десятыя, прилагаемъ къ послѣднимъ 7 десятыхъ дѣлимаго, и получаемъ всего 17 десятыхъ. Но это число десятыхъ также нацѣло не дѣлится на 45. Приводимъ его въ сотыя: 1,7 или 17 десятыхъ = 170 сотымъ. 170 сотыхъ + 2 сотыя (третья цифра дѣлимаго) составляютъ 172 сотыя. Раздѣливъ 172 сотыя на 45, получаемъ на каждую часть по 3 сотыя и еще въ остаткѣ 37 сотыхъ. Чтобы показать, что цифра 3, полученная для перваго частнаго, означаетъ 3 сотыя, ставимъ передъ нею два нуля, изъ которыхъ одинъ отдѣляемъ запятою, вотъ такъ: 0,03. Къ 37 сотымъ или 370 тысячнымъ остатка прилагаемъ 6 тысячныхъ (четвертую цифру дѣлимаго), и получаемъ всего 376 тысячныхъ. Раздѣляемъ послѣднее число также на 45, черезъ что получаемъ для втораго частнаго 8 тысячныхъ и для втораго остатка 16 тысячныхъ. Цифру 8 ставимъ въ частномъ непосредственно за цифрою 3, а 16 тысячныхъ приводимъ въ десятитысячныя: 16 тысячныхъ = 160 десятитысячнымъ; $^{160}/_{10000} + ^{9}/_{10000}$ (пятая цифра дѣлимаго) = 169 десяти-тысячнымъ. По раздѣленіи $^{169}/_{10000}$ на 45 получаемъ для частнаго 3 десяти-тысячныя, а въ остаткѣ $^{34}/_{10000}$. Остатокъ $^{34}/_{10000}$ показываетъ, что найденное частное 0,0383 не есть *точная* сорокъ-пятая доля дѣлимаго, а только *приближонная*. Въ самомъ дѣлѣ, частное 0,0383, будучи помножено на дѣлителя 45, дастъ въ произведеніи 1,7235, а не 1,7269. Здѣсь разность между даннымъ дѣлимымъ и полученнымъ произведеніемъ равняется $^{34}/_{10000}$, т. е. остатку, происшедшему отъ дѣленія. Чтобы точнѣе опредѣлить частное, надобно остатокъ $^{34}/_{10000}$ обратить въ сто-тысячныя доли и послѣднія раздѣлить также на 45. Остатокъ $^{34}/_{10000}$ = 340 сто-тысячнымъ, которыя, будучи раздѣлены на 45, даютъ въ частномъ 7 сто-тысячныхъ и еще въ остаткѣ $^{25}/_{100000}$. Если къ прежнему частному (0,0383) припишемъ съ правой стороны цифру 7, то получимъ новое частное (0,03837), которое уже гораздо ближе подходитъ къ настоящему. Продолжая поступать такимъ образомъ, будемъ все болѣе и болѣе приближаться къ настоящему частному, хотя никогда его не достигнемъ.

Представимъ объясненный примѣръ въ цифрахъ. 1,7269 = 172 сотымъ + 6 тысячн. + 9 десяти-тысячнымъ.

172 (сотыя) : 45=0,03 .... (первое частное)
въ остаткѣ 37 (сотыхъ)
или 370 (тысячн.)
+ 6 (тысячн.)
376 (тысячн.) : 45 = 0,008 .... (второе частное)
въ остаткѣ 16 (тысячн.)
или 160 (десяти-тысячн.)
+ 9 (десяти-тысячн.) : 45 = 0.0003 .... (третье частное)
въ остаткѣ 34 (десяти-тысячн.)
или 340 (сто-тысячн.) : 45 = 0,00007 ... (четвертое частное)
въ остаткѣ 25 (сто-тысячн.)
или 250 (милліон.) : 45 = 0,000005 .... (пятое частное)
25 и т. д.

Итакъ 1,7269 ... : 45 = 0,038375 (общее частное)
или сокращенно:
1,7269 : 45 = 0,0383755 ...
376
169
340
250
250
25 и т. д.

Легко замѣтить, что какъ бы далеко ни продолжали дѣйствія, никогда не получимъ настоящаго частнаго, ибо въ дѣленіи всегда будетъ получаться остатокъ.

Второе упрощенное рѣшеніе предыдущей задачи.

Не обращая вниманія на запятую и принявъ данное дѣлимое за цѣлое число, раздѣляемъ, по правиламъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ, число 17269 на 45. Отсюда получаемъ въ частномъ 383 и въ остаткѣ 34. Но число 383 не можетъ быть цѣлымъ, потому что, откинувъ въ дѣлимомъ запятую, черезъ то увеличили послѣднее въ 10.000 разъ; значитъ, что и полученное частное въ 10.000 разъ болѣе настоящаго. Слѣдовательно, чтобы получить настоящее частное, надобно число 383 уменьшить въ 10.000 разъ, — что и будетъ сдѣлано, когда въ немъ, отъ правой руки къ лѣвой, отдѣлимъ запятою столько знаковъ для десятичной дроби, сколько ихъ находится въ дѣлимомъ. Разумѣется, что недостающее число этихъ знаковъ добавляется нулями. Поэтому настоящее частное = 0,0383 ....

Примѣчаніе. Необходимо здѣсь замѣтить, что для полученія точнѣйшаго частнаго, мы прибавили къ полученному остатку сперва одинъ нуль; поэтому и въ дѣлимомъ черезъ это прибавленіе стало

однимъ десятичнымъ знакомъ болѣе противъ прежняго. Раздѣливъ остатокъ 340 на 45, получили новый остатокъ 25, къ которому опять прибавили нуль; т. е. придали лишній десятичный знакъ къ дѣлимому. Въ предыдущемъ примѣрѣ (смотрите первое рѣшеніе) прибавлено такимъ образомъ *три* нуля. Ясно, что эти нули должны входить въ соображеніе при счисленіи десятичныхъ знаковъ дѣлимаго. Итакъ теперь дѣлимое имѣетъ всего 7 десятичныхъ знаковъ, а не 4, какъ было сначала. Значитъ, что и въ полученномъ частномъ 383755 должно, отъ правой руки къ лѣвой, отдѣлить запятою для десятичной дроби всего 7 цифръ; т. е. изобразить его такъ: 0,0383755 ....

Примѣры:

1) 0,07543 : 127 = ?

2) На какое число надобно умножить 81, чтобы получить въ произведеніи 5,934141?

3) Опредѣлить 97-ю часть числа 3,50994.

4) Сколько составляетъ $^1/_{11}$ *тринадцатой части* дроби 0,031?

Общее правило. Чтобы раздѣлить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на цѣлое, надобно дѣлимое принять за цѣлое (не обращая вниманія на запятую) и производить дѣленіе по правиламъ цѣлыхъ чиселъ; потомъ въ полученномъ частномъ отдѣлить запятою, отъ правой руки къ лѣвой, столько цифръ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ числѣ, не забывая впрочемъ включать въ это число и тѣ нули, которые были приписываемы къ остаткамъ дѣленія для полученія точнѣйшаго частнаго, когда дѣлимое не дѣлится нацѣло на дѣлителя.

b. Дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

a. 1) *Раздѣлить 4 на 0,5.*

Рѣшеніе. Раздѣлить 4 на 0,5 все тоже, что раздѣлить 40 десятыхъ на 5 десятыхъ, или просто 40 на 5. Итакъ 4 : 0,5 = 40 : 5 = 8. Ясно, чтобы раздѣлить цѣлое число на десятичную дробь, надобно дѣлимое привести въ тѣ же самыя доли, въ какихъ означенъ дѣлитель, и потомъ по правиламъ цѣлыхъ чиселъ дѣлить числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей.

2) *Сколько разъ 2,4 содержится въ 12?*

Рѣшеніе. Число 2,4 = 24 десятымъ, а 12 цѣлыхъ = 120 десятымъ; 24 десятыя столько же разъ содержатся въ 120 десятыхъ,

сколько разъ 24 содержатся въ 120, т. е. 5 разъ. Здѣсь дѣлимое приводится въ десятыя доли потому, что въ нихъ выраженъ дѣлитель.

3) *Раздѣлить 7 на 0,32.*

Отв. Частное равно $21^{28}/_{32}$.

Рѣшеніе. Приводимъ дѣлимое въ тѣ же самыя доли, въ какихъ выраженъ дѣлитель, т. е. въ сотыя. 7 единицъ = 700 сотымъ. Поэтому 7 : 0,32 = 7,00 : 0,32 = $21^{28}/_{32}$.

4) *Сколько разъ дробь 0,09 содержится въ 17?*

Отв. $188^{8}/_{9}$.

Рѣшеніе. 17 един.=1700 сотымъ; 17,00 : 0,09=1700 : 9=$188^{8}/_{9}$.

5) 123 : 2,32 = ?
5) 29 : 0,1325 = ?
7) 1 : 0,007 = ?
8) 5 : 0,000029 = ?

При раздѣленіи цѣлаго числа на десятичную дробь, дѣлимое приводимъ въ тѣ же самыя доли, къ какихъ означенъ дѣлитель, а для этого прибавляемъ съ правой стороны дѣлимаго, отдѣливъ его сперва запятою, столько нулей, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлителѣ. Дѣлимое измѣнится, если по прежнему станемъ считать его за цѣлое; но оно не измѣнится, когда примемъ его за число частей, однородныхъ съ тѣми, въ которыхъ выраженъ дѣлитель. Такъ, приписавъ къ дѣлимому одинъ нуль, мы должны принимать его *за число десятыхъ долей* цѣлаго; приписавъ два нуля — *за число сотыхъ долей* и т. д. Послѣ этого видоизмѣненія дѣлимаго, принимаемъ дѣлимое и дѣлителя за цѣлыя числа и дѣлимъ ихъ одно на другое. Но, принявъ дѣлимое и дѣлителя за цѣлыя числа, мы хотя увеличиваемъ чрезъ то оба числа, но въ одинаковое число разъ, что, какъ извѣстно, не измѣняетъ частнаго.

Итакъ общее правило: *чтобы раздѣлить цѣлое число на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, должно дѣлимое представить въ видѣ дроби, имѣющей того же знаменателя, какой находится въ дѣлителѣ; т. е. приписать съ правой стороны дѣлимаго столько нулей, сколько въ дѣлителѣ десятичныхъ знаковъ. Потомъ, не обращая вниманія на запятыя, должно дѣлить оба числа одно на другое по правиламъ цѣлыхъ чиселъ.*

Въ примѣрахъ 3-мъ и 4-мъ искомыя частныя выражены въ цѣлыхъ числахъ и обыкновенныхъ дробяхъ; такъ въ 3-мъ примѣрѣ

частное равно $21^{28}/_{32}$, а въ четвертомъ $188^{8}/_{9}$. Но еслибъ требовалось въ означенныхъ примѣрахъ опредѣлить частное въ видѣ одной десятичной дроби, то очевидно нужнобъ было дроби $^{28}/_{32}$ и $^{8}/_{9}$ замѣнить имъ разнозначащими десятичными дробями. Здѣсь намъ нужно рѣшить вопросъ о *приведеніи простыхъ дробей въ десятичныя*, которымъ теперь и займемся.

Приведеніе простыхъ дробей въ десятичныя.

Возьмемъ снова третій примѣръ, а именно: *раздѣлить 7 на 0,32.* При раздѣленіи 7 на 0,32 сперва приводили 7 единицъ въ сотыя доли, а потомъ сотыя дѣлили на сотыя по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Вотъ такъ: 7 : 0,32 = 7,00 : 0,32 = 700 : 32 = 21.
28

Раздѣливъ 700 сотыхъ на 32 сотыя, получили въ частномъ 21 единицу, потому что оно показываетъ *число разъ* содержанія дѣлителя въ дѣлимомъ. Въ остаткѣ получили 28. Этотъ остатокъ показываетъ, что дѣлитель въ дѣлимомъ не содержится равнаго числа разъ. Слѣдовало бы по-крайней-мѣрѣ имѣть въ остаткѣ 32, чтобы въ частномъ получить число единицею болѣе противъ настоящаго. Поэтому, хотя по раздѣленіи остатка 28 на дѣлителя 32, нельзя надѣяться получить лишнюю единицу въ частномъ, однако этотъ остатокъ все-таки долженъ быть раздѣленъ на 32 равныя части. Его можно привести въ десятыя доли, которыхъ всего будетъ 280. Если 280 десятыхъ раздѣлить на 32, то получится въ частномъ 8 десятыхъ. Очевидно, что ихъ слѣдуетъ представить въ частномъ за цифрою 1, отдѣливъ прежде цѣлое число запятою. Вотъ такъ:

700 : 32 = 21,8
280
24

Это частное показываетъ, что дѣлитель содержится въ дѣлимомъ 21 разъ и 8 десятыхъ раза. Но здѣсь получается новый остатокъ 24, который означаетъ десятыя доли единицы. Чтобы точнѣе опредѣлить частное, новый остатокъ надобно привести въ сотыя, и эти сотыя также раздѣлить на 32.

700 : 32 = 21,87
60
280
240
———
16

Для точнѣйшаго опредѣленія частнаго, послѣдній остатокъ, т. е. 16 должно привести въ тысячныя доли и ихъ раздѣлить тоже на 32. Въ частномъ получится 5 тысячныхъ, а болѣе остатка не произойдетъ.

```
700 : 32 = 21,875
 60
 280
  240
   160
```

Слѣдовательно, число 32 содержится въ 700 *двадцать одинъ* разъ и 875 тысячныхъ раза. Но какъ при прежнемъ дѣленіи получили $21^{28}/_{32}$, то изъ этого слѣдуетъ, что $21^{28}/_{32}$ все тоже, что 21,875. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе 21,875, будучи представлено обыкновенною дробью, есть $21^{875}/_{1000}$ или $21^{28}/_{32}$.

Примѣръ. Дробь $^3/_4$ обратить въ десятичную.

Рѣшеніе. Такъ какъ на самомъ дѣлѣ число 3 не дѣлится на 4, то въ частномъ не получится ни одного цѣлаго, а только части отъ него. Если къ 3 припишемъ 0, то изъ 3 цѣлыхъ сдѣлаемъ 30 десятыхъ; 30 десятыхъ, раздѣленныя на 4, даютъ въ частномъ 7 десятыхъ и еще 2 десятыя въ остаткѣ. 2 десятыя остатка все равно, что 20 сотыхъ; 20 сотыхъ: 4 = 5 сотымъ. Слѣдовательно, въ частномъ получается всего 75 сотыхъ. Значитъ, что $^3/_4 = 0,75$. И дѣйствительно, $^{75}/_{100}$ есть только видоизмѣненіе $^3/_4$, ибо по сокращеніи дроби $^{75}/_{100}$ на 25, получимъ $^3/_4$.

Цифрами: 3 : 4
все равно, что 30 десятыхъ: 4
все равно, что 28. десят. + 20 сот. : 4 = 7 десят. + 5 сот. = 0,75.

Сокращенно:

```
30 : 4 = 0,75
 20
```

Изъясненіе. Въ этомъ примѣрѣ вмѣсто дѣлимаго 3 взято 300. Ясно, что дѣлимое увеличено въ 300 разъ; поэтому для полученія настоящаго частнаго, надобно число 75, найденное для частнаго, уменьшить въ 100 разъ,—что и будетъ сдѣлано, если въ частномъ отдѣлимъ для десятичной дроби двѣ цифры, т. е. *столько, сколько было приписано нулей къ дѣлимому.*

Еще примѣръ. Обратить $^8/_{129}$ въ десятичную дробь.

Сокращенное рѣшеніе. Надобно 8 раздѣлить на 129; для этого припишемъ къ 8 два нуля; но не забудемъ, что черезъ эту при-

писку дѣлимое увеличится во 100 разъ. 800 : 129 = 6 съ остаткомъ 26. Увеличивъ остатокъ въ 10 разъ, раздѣлимъ его снова на 129, причемъ не забудемъ, что черезъ увеличеніе остатка въ 10 разъ, увеличится и дѣлимое тоже въ 10 кратъ, такъ что теперь дѣлимое увеличено всего въ 1000 кратъ; 260 : 129 = 2 съ остаткомъ 2. Если послѣдній остатокъ, за малостію его, отбросимъ, то получимъ въ частномъ всего 62. Это частное не есть настоящее, ибо для полученія его дѣлимое было увеличено въ 1000 разъ. Слѣдовательно, искомое частное должно быть въ 1000 разъ менѣе 62, т. е. 0,062.

Примѣры.

Дробь $^{5}/_{114}$ обратить въ десятичную.

» $^{3}/_{1394}$ » » »

Общее правило. Для обращенія простой дроби въ десятичную, надобно числителя ея раздѣлить на знаменателя; но чтобъ можно было на самомъ дѣлѣ произвести дѣленіе, къ числителю приписываютъ одинъ, два и вообще столько нулей, чтобъ увеличенный такимъ образомъ числитель могъ содержать въ себѣ знаменателя одинъ или нѣсколько разъ, черезъ что и получится первая цифра частнаго. Для нахожденія прочихъ цифръ частнаго, надобно съ послѣдовательными остатками поступать такъ же, какъ поступали съ числителемъ. Но какъ черезъ приписаніе къ числителю и остаткамъ каждаго лишняго нуля, дѣлимое увеличивается всякій разъ вдесятеро, то очевидно, что для полученія настоящаго частнаго, вмѣсто найденнаго, должно отдѣлить въ послѣднемъ, отъ правой руки къ лѣвой, столько цифръ для десятичной дроби, сколько всего было прибавлено нулей, какъ къ числителю, такъ и къ остаткамъ.

Изъ рѣшенія предложенныхъ примѣровъ также легко замѣтить: 1) *что не всякую простую дробь можно точнымъ образомъ обратить въ десятичную, и 2) чѣмъ больше десятичныхъ знаковъ получаемъ въ частномъ, тѣмъ больше приближаемъ искомую десятичную дробь къ простой, и тѣмъ меньше становится разность между обѣими.*

c. Дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичной дробью.

Послѣ сказаннаго въ предыдущихъ двухъ отдѣлахъ предлежащаго параграфа, этотъ отдѣлъ не требуетъ болѣе никакихъ объясненій. Понятно, *чтобы раздѣлить одну десятичную дробь на другую, должно обѣ привести къ одинакому знаменателю, т. е. уравнять въ нихъ число десятичныхъ знаковъ, и потомъ производить дѣленіе по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Если же въ частномъ, кромѣ цѣлаго числа,*

получится простая дробь, то для полученія, вмѣсто ея, десятичной, точной или приближонной, надобно поступать такъ, какъ было показано при приведеніи простыхъ дробей въ десятичныя.

Примѣръ:

2,79 : 0,591 = ?

Рѣшеніе. 2,79 : 0,591 = 2,790 : 0,591 =

2790 : 591 = 4,7208.....
4260
1230
4800
72

§ 36.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ ДѢЛЕНІИ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

1) 4,8 : 2 = ? 2) 7,52 : 4 = ? 3) 1,028 : 4 = ? 4) 0,846 : 6 = ?
5) 0,132716 : 11 = ?

6) Какую часть серебрян. рубля составляетъ 1 англійскій шиллингъ, когда англ. монета крона, въ которой считается 5 шилл., = 1,542 руб. сер. ?

7) Когда гульденъ = 0,65 рубл. сер., то чему равенъ крейцеръ, которыхъ считается 60 въ гульденѣ?

8) Испанскій піастръ = 1,33 руб. сер.; чему равенъ реалъ, которыхъ считается 20 въ піастрѣ?

9) Какую часть серебр. копѣйки составляетъ 1 пфенингъ, когда каждый шведскій талеръ = 1,42 рубл. сереб. или 576 пфенингамъ?

10) Сколько русск. верстъ считается въ одной географической или нѣмецкой мили, когда она = 24345,6 англійск. футамъ?

11) Франц. метръ какую часть составляетъ русск. саж., когда онъ равенъ 3 фут. 3 д. 3,7079 линіямъ?

12) 8,4 : 1,6 = ? 13) 7,528 : 5,407 = ?
14) 0,8173 : 9,3275 = ? 15) 0,009 : 0,815 = ?
16) 23,61728 : 7,286 = ? 17) 0,008143 : 542,27 = ?
18) 2,7 : 1,53 = ? 19) 14,12 : 7, 176 = ?
20) 9,3 : 4,2871 = ? 21) 0,17 : 0,27287 = ?
22) 0,01 : 0,002756 = ?
23) 5 саж. 3 ф. 8 д. 3,218 лин. : 0,27 = ?
24) 4 пуда 15,407 фунт. : 7,879 = ?
25) 13 руб. 47,101 коп. : 2,7146 = ?
26) 9 час. 11,01 мин. : 6 час. 43,5093 мин. = ?
27) Сколько разъ килограммъ, который содержитъ въ себѣ 2,4419 русск. фунта, содержится въ пудѣ?

28) 1000 десятинъ земли сколько составляютъ арпановъ, если каждый арпанъ = 0,31294 русск. десятины?

29) Въ 10 четвертяхъ муки сколько будетъ гектолитровъ, если каждый гектолитръ = 3,8113 русск. четверика?

30) Въ 1000,49 русск. саженяхъ сколько содержится француз. метровъ, когда каждый метръ = 3,2809 русск. фута?

31) Въ 100 русск. верстахъ сколько англійскихъ миль, если каждая англ. миля = 1,50857 русск. версты?

32) Вмѣсто 100 рубл. серебр. сколько можно получить франковъ, полагая каждый франкъ въ 0,25022 рубл. серебромъ?

33) Превратить 100 рубл. серебр. въ шиллинги, когда извѣстно, что каждый шиллингъ = 0,3048 рубл. сер.?

34) 1000 рубл. сер. размѣнять на испанскіе дублоны, изъ которыхъ каждый = 19,92 рубл. серебромъ?

35) Вѣсъ кубическаго дюйма чистой воды = 3,84 золотника, а вѣсъ кубич. дюйма гранита = 10,37 золот. Во сколько разъ плотность гранита болѣе плотности воды?

36) Обратить 1000 руб. ассигнаціями въ голландскіе червонцы; причемъ извѣстно, что 1 руб. асс. въ $3\frac{1}{2}$ раза менѣе 1 руб. сер., а голландскій червонецъ = 2,96 руб. серебромъ?

37) Найти десятичную дробь, которая дастъ въ произведеніи 0,000734, когда будетъ умножена на 0,079.

Слѣдующія простыя дроби обратить въ десятичныя:

38)	$^{1}/_{2}$	39)	$^{1}/_{5}$	40)	$^{3}/_{4}$	41)	$^{7}/_{8}$
42)	$^{19}/_{20}$	43)	$^{17}/_{25}$	44)	$^{11}/_{16}$	45)	$^{9}/_{12}$
46)	$^{13}/_{125}$	47)	$^{63}/_{75}$	48)	$^{23}/_{40}$	49)	$^{6}/_{15}$
50)	$^{2}/_{3}$	51)	$^{5}/_{6}$	52)	$^{21}/_{37}$	53)	$^{221}/_{318}$
54)	$^{5143}/_{10278}$	55)	$^{6178}/_{9181}$	56)	$^{543}/_{811}$		
57)	$^{17}/_{480}$	58)	$^{21}/_{7081}$	59)	$^{1}/_{417327}$		

§ 37.

ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

Прежде видѣли, что при обращеніи простыхъ дробей въ десятичныя, не всякую простую дробь можно точнымъ образомъ привести въ десятичную. Есть дроби, напримѣръ $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{13}$ и проч., которыя можно замѣнить только *приближонными* десятичными дробями. Поэтому, если не каждая простая дробь приводится точно въ десятичную, то рождается обратный вопросъ: *нельзя ли по-крайней мѣрѣ для всякой такой десятичной дроби отъискать ту простую дробь, отъ которой она произошла?* Этотъ вопросъ рѣшается положительно, какъ сейчасъ увидимъ; но прежде опредѣлимъ, какія изъ простыхъ

дробей выражаются опредѣленными десятичными строками и какія приближонными.

a. Знаменатели дробей, какъ напримѣръ: $^{5}/_{8}$, $^{19}/_{25}$, $^{73}/_{80}$, $^{317}/_{1250}$ и проч., разлагаются на слѣдующихъ первоначальныхъ сомножителей:

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$25 = 5 \times 5$$
$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$
$$1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

Во всѣхъ этихъ знаменателяхъ первоначальные сомножители одни и тѣ же, именно числа 2 и 5. Но какъ каждый изъ знаменателей десятичныхъ дробей, т. е. числа 10, 100, 1000 и т. д., разлагается на тѣхъ же самыхъ первоначальныхъ сомножителей, взятыхъ одинъ или нѣсколько разъ, то и выходитъ, что простыя дроби, которыхъ знаменатели: 8, 25, 80, 1250 и проч., всегда возможно выразить въ конечныхъ десятичныхъ частяхъ.

Дѣйствительно,

$$\frac{5 \times 125}{8 \times 125} = {}^{625}/_{1000} = 0{,}625$$
$$\frac{19 \times 4}{25 \times 4} = {}^{76}/_{100} = 0{,}76$$
$$\frac{73 \times 125}{80 \times 125} = {}^{9125}/_{10000} = 0{,}9125$$
$$\frac{317 \times 8}{1250 \times 8} = {}^{2536}/_{10000} = 0{,}2536 \text{ и т. д.}$$

Итакъ *всякая простая дробь, которой знаменатель разлагается лишь на первоначальныхъ сомножителей 2 и 5, сколько бы разъ ни повторенныхъ, можетъ выразиться точною десятичною дробью.*

b. Но, превращая дроби $^{5}/_{7}$, $^{3}/_{11}$, $^{19}/_{29}$ и проч., легко примѣтить можно, что онѣ никогда не выразятся точнымъ образомъ въ десятичныхъ доляхъ, потому что на какое число ни помножимъ знаменателей 7, 11, 29 и проч., никогда не получимъ въ произведеніи круглаго числа, какъ-то: 10, 100, 1000 и проч. Отсюда общее правило: *всякая простая дробь, которой знаменатель, будучи разложенъ на первоначальныхъ сомножителей, даетъ еще и другія числа, кромѣ 2 и 5, не можетъ быть точнымъ образомъ приведена въ десятичную, такъ что послѣдняя будетъ приближонною дробью.*

Теперь займемся собственно *періодическими* дробями. Пусть для примѣра дана дробь $^1/_7$, которую требуется превратить въ десятичную.

1,0 : 7 = 0,1428571428571. . . . . .
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50
10

Здѣсь примѣчаемъ, *во-первыхъ*, что какъ бы далеко дѣйствія дѣленія ни продолжали, никогда не получимъ въ остаткѣ 0; *во-вторыхъ*, каждый изъ остатковъ, получаемыхъ отъ частныхъ дѣленій, долженъ быть менѣе знаменателя превращаемой дроби, а потому различныхъ остатковъ всегда будетъ менѣе, по-крайней-мѣрѣ единицею, нежели сколько единицъ въ знаменателѣ. Итакъ, въ предлежащемъ примѣрѣ, гдѣ знаменатель 7, число различныхъ остатковъ можетъ быть только 6, а именно: 1, 3, 2, 6, 4, 5. Ясно, что если станемъ продолжать дѣленіе, прежніе остатки будутъ возвращаться, а отъ тѣхъ же самыхъ остатковъ, увеличиваемыхъ въ 10 разъ, необходимо и въ частномъ получатся *послѣдовательно тѣ же самыя цифры*, какія получили въ началѣ. Слѣдовательно, частное представитъ собою рядъ цифръ, повторяемыхъ въ десятичной дроби въ одномъ и томъ же порядкѣ, что и называется *періодомъ*. Отъ этого и самая десятичная дробь получаетъ названіе *періодической*.

Періодъ можетъ состоять изъ одной, двухъ, трехъ и т. д. цифръ, смотря по числу различныхъ цифръ, въ него входящихъ.

Такъ: 0,111111 . . . . . . называется *одночленною* періодическою дробью; 0,727272 . . *двухчленною*; 0,574574 . . *трехчленною*, и т. д.

Вообще всякая приближонная десятичная дробь есть періодическая, хотя бы періодъ ея, по причинѣ большаго числа цифръ, ее составляющихъ, и не былъ замѣченъ.

Періодическія дроби обыкновенно раздѣляются на *чистыя* и

смѣшанныя. Первыя суть тѣ, въ которыхъ періодъ начинается съ первой цифры послѣ запятой, а вторыя тѣ, въ которыхъ періодъ считается съ второй, третьей цифры и т. д.

0,8888. . . . . . . } чистыя періодическія дроби.
0,019019019. . . . }

0,45272727 . . . . Здѣсь періодъ начинается съ третьей цифры, а потому эта дробь есть *смѣшанная.*

а. Чистыя періодическія дроби.

Возьмемъ нѣсколько періодическихъ дробей, напримѣръ:

0,6666 . . . .
0,585858 . . . .
0,137137 . . . . и проч.

и раздѣлимъ каждую изъ нихъ на число, образующее періодъ.

0,6666 . . . . : 6 = 0,11111 . . . .
0,585858 . . . . . . : 58 = 0,010101 . . . .
0,137137 . . . . . . : 137 = 0,001001 . . . .

Поэтому

0,6666 . . . . . . = 6 × 0,1111 . . . . . .
0,5858 . . . . . . = 58 × 0,010101 . . . . .
0,137137 . . . . . =137 × 0,001001 . . . . .

Изъ этого можемъ заключить, что *на всякую періодическую дробь можно смотрѣть какъ на произведеніе, состоящее изъ двухъ такихъ сомножителей, изъ которыхъ одинъ есть цѣлое число, образующее періодъ, а другой — періодическая дробь, которой періодомъ служитъ 1, или 1, предшествуемая однимъ, двумя, тремя и вообще нѣсколькими нулями.*

Обратимъ особое вниманіе на вторыхъ сомножителей разложенныхъ нами періодическихъ дробей, а именно:

0,11111 . . . .
0,010101 . . . .
0,001001 . . . .

Всѣ эти дроби весьма сходствуютъ между собою, *и получаются отъ такихъ простыхъ дробей, для которыхъ числителемъ служитъ 1, а знаменателемъ цифра 9, взятая одинъ, два, три и такъ далѣе разъ, вообще столько, сколько въ періодѣ цифръ.*

Въ самомъ дѣлѣ,

$$^1/_9 = 0,1111111 \ldots\ldots$$
$$^1/_{99} = 0,010101 \ldots\ldots$$
$$^1/_{999} = 0,001001 \ldots\ldots \text{ и т. д.}$$

Теперь не трудно узнать ту простую дробь, отъ которой получена какая-либо изъ данныхъ періодическихъ дробей. Пусть *требуется опредѣлить, отъ какой простой дроби произошла слѣдующая періодическая*: 0,6666.

Дробь 0,6666....$=6 \times 0,111111$...., но $0,11111... = {}^1/_9$; слѣдовательно, $0,6666 \ldots\ldots = 6 \times {}^1/_9 = {}^6/_9 = {}^2/_3$. Дѣйствительно, если $^2/_3$ обратимъ въ десятичную дробь, то получимъ обратно 0,6666....

Еще примѣръ: *отъ какой простой дроби произошла дробь* 0,57915791 . . . . ?

Рѣшеніе. Дробь $0,57915791 \ldots = 5791 \times 0,00010001 \ldots = 5791 \times {}^1/_{9999} = {}^{5791}/_{9999}$.

Эти примѣры показываютъ, что *всякая чистая періодическая дробь происходитъ отъ такой простой дроби, которой числителемъ служитъ число, образующее въ ней періодъ, а знаменателемъ число, состоящее изъ столько разъ написанной одна подлѣ другой цифры 9, сколько въ періодѣ находится знаковъ, считая и нули.*

Есть еще и другой способъ находить для періодическихъ дробей тѣ простыя, отъ которыхъ онѣ получены.

Пусть для примѣра дана дробь

$$0,8888 \ldots\ldots$$

Если ее увеличить въ 10 кратъ, то получимъ 8,888....., то есть *десятикратную* данную дробь; отнявъ же отъ послѣдней *единичную*, получимъ въ остаткѣ *девятикратную*.

$$\begin{array}{r} 8,888 \ldots\ldots \\ 0,888 \ldots\ldots \\ \hline 8, \end{array}$$

Слѣдовательно, 8 цѣлыхъ представляютъ *девятикратную* данную періодическую дробь, а $^8/_9$ настоящую.

Второй примѣръ. Отъ какой простой дроби происходитъ дробь 0,545454....

Рѣшеніе. Отъ $^{54}/_{99}$, потому что, увеличивъ 0.545454...... въ 100 разъ и изъ произведенія отнявъ единичную данную, получимъ

$$\begin{array}{r} 54,545454 \ldots\ldots \\ 0,545454 \ldots\ldots \\ \hline 54, \end{array}$$

цѣлое число, которое замѣняетъ данную періодическую дробь, взятую 99 разъ. Поэтому настоящая періодическая дробь равняется $^{54}/_{99}$.

Третій примѣръ. Дробь 0,00590059 .... обратить въ простую.

Рѣшеніе. 59,00590059 . . . . . (выраженіе данной дроби, увеличенной въ 10000 разъ).

0,00590059. . . . . .

59, (цѣлое число, въ которомъ данная дробь содержится 9999 разъ).

Наконецъ $^{59}/_{9999}$ та дробь, отъ которой получена данная періодическая.

Общее правило: 1) Переставьте запятую, отъ лѣвой руки къ правой, на столько знаковъ, сколько ихъ находится въ періодѣ: 2) вычтите изъ увеличенной такимъ образомъ дроби единичную данную, и 3) остатокъ раздѣлите на уменьшенное единицею число, на которое умножали уменьшаемое.

Если періодическую дробь сопровождаетъ цѣлое число, то послѣднее приписывается къ той простой дроби, отъ которой первая произошла. Такъ, напримѣръ, смѣшанное число 4,636363.......=

$$4\frac{63}{99}=4\frac{7}{11}$$

в. Смѣшанныя періодическія дроби.

Примѣръ. Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая періодическая: 0,48383.....

Если въ данной дроби переставимъ запятую черезъ одинъ знакъ вправо, то получимъ 4,8383 . . . . . т. е. дробь въ *десять* разъ бо́льшую настоящей. Но 0,8383. . . . . = $^{83}/_{99}$: поэтому 4.8383 . . = 4 $^{83}/_{99}$. Найденное смѣшанное число $4^{83}/_{99}$ замѣняетъ *десятикратную* данную періодическую дробь; итакъ, если раздѣлимъ $4^{83}/_{99}$ на 10, то получимъ ту простую, отъ которой произошла данная періодическая. $4^{83}/_{99}$: 10 = $^{479}/_{990}$.

Второй примѣръ. Отъ какой простой дроби получена дробь 0,59 142142....?

Рѣшеніе. 0,59142142 . . . . . . $\times$ 100 = 59.142142 . . . . . = $59^{142}/_{999}$ = $^{59083}/_{999}$. Но какъ послѣдняя дробь получена отъ увеличенія данной въ 100 разъ, то для нахожденія искомой надобно послѣднюю уменьшить въ 100 разъ. $^{59083}/_{999}$: 100 = $^{59083}/_{99900}$.

Что же прежде всего надобно сдѣлать?

Поставить запятую предъ тою цифрою, съ которой начинается періодъ.

А потомъ?

Полученную чистую періодическую дробь обратить въ простую.

Далѣе?

Прибавить къ ней цѣлое число, если оно получится черезъ перемѣщеніе запятой.

А наконецъ?

Уменьшить сумму во столько разъ, во сколько періодическая дробь была увеличена черезъ перемѣщеніе запятой.

§ 38.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая періодическая: 0,9999....

2) Обратить періодическую дробь: 0,045045 . . въ простую.

3) Обратить періодическую дробь: 0,13251325.., въ простую.

4) Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая періодическая: 0,3565656...

5) Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая періодическая: 0,01849849....

§ 39.

ВОПРОСЫ И РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЕСЯ КЪ ЧЕТЫРЕМЪ ДѢЙСТВІЯМЪ НАДЪ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ.

Вопросы. Что разумѣютъ подъ именемъ *десятичной дроби?* — Какихъ выгодъ достигаютъ посредствомъ десятичныхъ дробей? — Какимъ образомъ всякую десятучную дробь, представленную въ видѣ простой дроби, изобразить безъ знаменателя? — Составляетъ ли запятая необходимый знакъ при изображеніи десятичной дроби безъ знаменателя? — Можно ли отъ десятичной дроби откидывать нули, стоящіе съ правой стороны числа, которое изображаетъ числителя дроби? — Отъ чего зависитъ величина долей, въ которыхъ изображается десятичная дробь? — А величина самой дроби, преимущественно зависитъ отъ какого десятичнаго знака? — При изображеніи десятичной дроби безъ знаменателя, сколько цифръ должно быть съ правой стороны запятой? — Если число цифръ числите-

ля менѣе числа нулей знаменателя, то какъ слѣдуетъ поступить въ такомъ случаѣ? — А если число цифръ числителя превышаетъ число нулей знаменателя? — Какъ надобно поступить въ томъ случаѣ, когда желаютъ десятичную дробь *увеличить* или *уменьшить* въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ? — Во сколько разъ десятичная дробь увеличится, если запятая въ ней будетъ вовсе откинута и десятичная дробь должна будетъ принять значеніе цѣлаго числа? — Какимъ образомъ десятичныя дроби приводятся къ одному знаменателю? — Какъ слагаются между собою и вычитаются одна изъ другой десятичныя дроби? — При умноженіи десятичныхъ дробей сколько случаевъ имѣютъ мѣсто? — Какъ производится умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число? — А умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичной дробью? — Какъ производится умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичной дробью? — Сколько разныхъ случаевъ имѣютъ мѣсто при дѣленіи десятичныхъ дробей, и какія правила имъ соотвѣтствуютъ? — Какъ производятся повѣрки разнымъ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями? — Всякая ли простая дробь можетъ быть приведена въ десятичную, и какъ это дѣйствіе производится? — Всякая ли дробь можетъ быть приведена въ *конечную* или опредѣленную десятичную? — Что называется *періодической* десятичною дробью? — Какимъ образомъ отыскивается по данной періодической дроби та простая, отъ которой первая была получена? — При приведеніи простыхъ дробей въ десятичныя, сколькими десятичными знаками должно довольствоваться, если въ вычисленіяхъ не требуется особенной точности?

1) Платина въ 20,3366 раза, золото въ 19,2881 раза, ртуть въ 13,568 раза, свинецъ въ 11,352 раза, серебро въ 10,4743 раза, мѣдь въ 8,8745 раза тяжелѣе воды. Во сколько разъ означенные металлы тяжелѣе желѣза, которое въ 7.888 раза тяжелѣе воды.

2) $$\frac{(5,409 + 0,09 + 3,891) - (2,789 + 3,085 + 0,57)}{(2,013 + 0,99 + 2,34)} = ?$$

3) Изъ суммы чиселъ: 2,13245 + 0,0047 + 9,89 вычесть сумму чиселъ: 1.76543 + 0,17 + 9,99, остатокъ умножить на сумму чиселъ: 0,231 + 4,73 и произведеніе раздѣлить на разность чиселъ: 3,4621 — 2,917.

4) Три четверти 5,968 фута составляетъ какую часть отъ саженіи?

5) 15 фунтовъ 17 лот. 2 зол. изобразить въ десятичныхъ доляхъ пуда, а потомъ отъ полученной дроби взять $^4/_5$ доли.

6) Нѣкто, отправляясь въ Берлинъ, имѣлъ при себѣ 1000 руб. сер.; тамъ издержалъ онъ 250 прусскихъ талеровъ (въ 91,25 коп. сер. каждый); остальныя затѣмъ деньги онъ прожилъ въ Вѣнѣ, промѣнявъ ихъ на австрійскіе талеры, изъ которыхъ каждый равенъ 1 р.

28,25 коп. сер. Спрашивается: сколько австрійскихъ талеровъ онъ прожилъ въ Вѣнѣ?

7) Раздѣлить 0,059417 на 123,81 и полученное частное раздѣлить еще на 7,9.

8) $\frac{(6,71 + 2,093 + 0,036) \times (1,743 + 0,27 - 0,049)}{325,00741} = ?$

9) $\frac{(5,4 \text{ пуд.} + 17.83 \text{ фунт.} - 0,934 \text{ лот.}) \times 0,25}{0,0035} = ?$

10) $(0,745 \text{ саж.} + {}^{17}/_{25} \text{ саж.} + 1,52 \text{ фут.}) : ({}^{2}/_{3} \text{ фут.} + 0,83 \text{ ф.}) = ?$

11) Изобразить $4^{5}/_{8}$ сутокъ въ десятичныхъ доляхъ года, считая въ солнечномъ году 365 сутокъ 5 часовъ 48 минутъ 45 секундъ.

12) Чѣмъ десятичная дробь 0,1089 болѣе или менѣе $^{5}/_{11}$?

13) Сколько въ 1 русскомъ фунтѣ кельнскихъ марокъ, когда кельнская марка = 0,57105 русск. фун.?

14) Сколько въ 100 русск. десятинахъ прусскихъ рутъ, когда прусскій моргенъ, составляющій 0,2337 десятины, равняется 180 прусскимъ рутамъ?

15) Продано пеньки 126,5 прусскихъ центнеровъ. Сколько это составитъ пудовъ, когда каждый прусскій центнеръ = 125 фунт. 60 зол. 53 дол. рус. вѣса?

16) Привезено изъ Финляндіи въ Россію товару вѣсомъ на 120 финляндскихъ фунтовъ. Сколько это составитъ пудовъ, когда каждый финляндскій фунтъ = 1 фунту 3 зол. 62,42 дол. русск. вѣса?

§ 40.

РАЗЛОЖЕНІЕ ПРОСТЫХЪ НЕСОКРАЩАЕМЫХЪ ДРОБЕЙ ВЪ НЕПРЕРЫВНЫЯ.

Въ началѣ этого отдѣла было сказано, что изъ всѣхъ дробей, кромѣ десятичныхъ, примѣчательны тѣ, которыхъ члены, будучи представлены въ большихъ числахъ, взаимно первыя числа; напримѣръ: $^{359}/_{965}$, $^{907}/_{18564}$ и проч. Такія дроби, вводимыя въ исчисленія, слишкомъ обременяютъ выкладки, и потому нерѣдко вмѣсто нихъ предпочитаютъ къ нимъ приближонныя, но зато выраженныя въ малыхъ числахъ. Приближонныя величины получаются черезъ разложеніе простыхъ дробей *въ непрерывныя*.

Примѣчаніе. Вообще непрерывныя дроби имѣютъ важное значеніе при исчисленіи несоизмѣримыхъ количествъ, но въ такомъ случаѣ дальнѣйшее изслѣдованіе ихъ основывается на алгебраическихъ началахъ.

Пусть для примѣра дана будетъ дробь $^{251}/_{764}$, которую требуется выразить приблизительно въ меньшихъ числахъ. Чтобъ оты-

скать требуемое, надобно узнать, какую часть числитель данной составляетъ отъ своего знаменателя, а для этого оба члена ея раздѣлить на числителя.

$$^{251}/_{764} = \frac{1}{3 + {}^{11}/_{251}}$$

Отбросивъ дробь, находящуюся въ знаменателѣ, получимъ $^1/_3$, т. е. *первую* приближенную величину данной дроби. Очевидно, что $^1/_3$ болѣе данной дроби, потому что послѣдняя равна 1, раздѣленной на $3^{11}/_{251}$, а не просто на 3. Чтобы видѣть, въ чемъ состоитъ разность между обѣими дробями, данною и первою приближонною, обратимъ ихъ въ десятичныя и потомъ вычтемъ одну изъ другой

$$^1/_3 = 0{,}33333\ \dots\dots$$
$$^{251}/_{764} = 0{,}32853\ \dots\dots$$
$$0{,}00480 \text{ (разность).}$$

Для нахожденія второй приближонной величины надобно поступить съ дробью $^{11}/_{251}$ точно такъ, какъ поступили съ данною, т. е. оба ея члена раздѣлить на числителя.

$$^{11}/_{251} = \frac{1}{22 + {}^{9}/_{11}}$$

Замѣнивъ въ предыдущемъ выраженіи дробь $^{11}/_{251}$ найденною для нея величиною, будемъ имѣть

$$^{251}/_{764} = \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + {}^{9}/_{11}}}$$

Отбросимъ снова въ послѣднемъ знаменателѣ дробь $^9/_{11}$, найдемъ, что

$$^{251}/_{764} = \frac{1}{3 + {}^{1}/_{22}}$$

Это выраженіе легко представить въ видѣ простой дроби: стоитъ только смѣшанное число $3^1/_{22}$, которое замѣняетъ знаменателя, привести въ дробь, и на послѣднюю раздѣлить 1.

$$3^1/_{22} = {}^{67}/_{22}, \qquad 1 : {}^{67}/_{22} = {}^{22}/_{67}.$$

Итакъ дробь $^{22}/_{67}$ есть *вторая* приближонная величина данной дроби: она ближе подходитъ къ послѣдней, но зато выражена уже въ большихъ числахъ. Чтобъ убѣдиться въ томъ, приведемъ ее, какъ и первую, въ десятичную дробь, и потомъ вычтемъ изъ данной.

$$\begin{array}{r} {}^{251}/_{764} = 0{,}3285\ \ldots \\ {}^{22}/_{67} = 0{,}3283\ \ldots \\ \hline 0{,}0002 \text{ (разность).} \end{array}$$

Разность между обѣими величинами такъ незначительна, что дробь $^{22}/_{67}$ всегда можно принять въ выкладкахъ, нетребующихъ большой точности, за данную дробь.

Чтобы найти третью приближонную величину, надобно съ послѣднею откинутою дробью ($^{9}/_{11}$) поступить также, какъ поступили съ дробью $^{11}/_{251}$.

$$^{9}/_{11} = \frac{1}{1 + {}^{2}/_{9}}$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$^{251}/_{764} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{11}{251}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + {}^{9}/_{11}}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + {}^{2}/_{9}}}}$$

А *третья* приближонная выразится такъ: $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1}}}$

что равно $\dfrac{1}{3 + {}^{1}/_{23}}$ или $\dfrac{1}{{}^{70}/_{23}} = {}^{23}/_{70}$.

Дробь $^{23}/_{70}$ еще болѣе приближается къ данной, нежели $^{22}/_{67}$, потому что

$$\begin{array}{r} {}^{23}/_{70} = 0{,}32857 \\ {}^{271}/_{764} = 0{,}32853 \\ \hline 0{,}00004 \text{ (разность).} \end{array}$$

Для полученія *четвертой* приближонной величины, должно съ дробью ($^{2}/_{9}$) послѣдняго знаменателя поступить также, какъ поступили съ дробями $^{11}/_{251}$ и $^{9}/_{11}$.

$$^{2}/_{9} = \frac{1}{4 + {}^{1}/_{2}}$$

Замѣнивъ въ предыдущей непрерывной строкѣ дробь $^2/_9$ выраженіемъ $\frac{1}{4+{}^1/_2}$, получимъ:

$$^{251}/_{764}=\cfrac{1}{3+{}^{11}/_{251}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+{}^9/_{11}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+{}^2/_9}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+{}^1/_2}}}}$$

Итакъ, если въ послѣднемъ выраженіи отбросимъ дробь $^1/_2$, то получимъ величину для *четвертой* приближонной дроби.

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+{}^1/_4}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+{}^4/_5}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{{}^{114}/_5}}=\cfrac{1}{3+{}^5/_{114}}=\cfrac{1}{{}^{347}/_{114}}=\frac{114}{347}$$

Но дробь послѣдняго знаменателя, т. е. $^1/_2$, по сокращеніи на своего числителя, или на 1, не перемѣняется; поэтому выведенная нами послѣдняя строка далѣе не можетъ продолжаться; отсюда окончательно:

$$^{251}/_{764}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+{}^1/_2}}}}$$

Это выраженіе, замѣняя данную дробь, называется *непрерывною дробью*. Слѣдовательно, подъ *непрерывными дробями должно разумѣть такія, которыя имѣютъ знаменателемъ цѣлое число съ дробью, которая также въ своемъ знаменателѣ содержитъ цѣлое число съ дробью, и такъ далѣе.*

Въ предлежащемъ примѣрѣ получили четыре приближонныя величины, а именно: $^1/_3$, $^{22}/_{67}$, $^{23}/_{70}$, $^{114}/_{347}$. Разсмотримъ теперь ихъ относительную величину.

Для полученія первой приближонной дроби, въ выраженіи

$$\frac{1}{3+{}^{11}/_{251}}$$

была отброшена дробь $^{11}/_{251}$. Отбросивъ эту дробь, мы уменьшили знаменателя; уменьшивъ знаменателя, въ выраженіи $^{1}/_{3}$ получили бо́льшую величину, нежели какую бы надлежало получить. Отсюда видно, что первая приближонная величина должна быть болѣе данной дроби, — въ чемъ мы и удостовѣрились черезъ приведеніе обѣихъ дробей въ десятичныя.

Для *второй* приближонной величины первоначально получили слѣдующее выраженіе:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+{}^{9}/_{11}}},$$

въ которомъ отбросили потомъ дробь $^{9}/_{11}$.

Оставшаяся дробь $^{1}/_{22}$ болѣе выраженія $\frac{1}{22+{}^{9}/_{11}}$, поэтому и дѣлитель $3+{}^{1}/_{22}$ болѣе настоящаго дѣлителя $3+\frac{1}{22+{}^{9}/_{11}}$. Отсюда понятно, что частное $\frac{1}{3+{}^{1}/_{22}}$ менѣе настоящаго частнаго $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+{}^{9}/_{11}}}$.

Слѣдовательно, *вторая* приближонная должна быть *менѣе* данной, — что мы также могли замѣтить изъ приведенія ея въ десятичную.

Такимъ же образомъ нетрудно доказать, что *третья* приближонная величина будетъ болѣе данной дроби, а *четвертая* — опять менѣе ея. Однимъ словомъ, здѣсь примѣчаемъ постоянный законъ, что ***всѣ нечетныя приближонныя величины болѣе, а всѣ четныя менѣе данной дроби.***

Примѣненіе. Обратить дроби $^{359}/_{965}$ и $^{95}/_{101}$ въ непрерывныя, опредѣлять по порядку всѣ приближенныя величины этихъ дробей, сравнить послѣднія между собою и, наконецъ, оправдать постоянный законъ относительно ихъ взаимнаго достоинства.

§ 41.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ ВЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЯХЪ.

Вопросы. Какъ поступаютъ съ дробями, которыхъ члены, будучи взаимно первыми числами, выражены въ большихъ числахъ? — Какъ

найти первую приближонную какой-либо несокращаемой дроби? — Почему въ такомъ случаѣ оба члена дроби дѣлятъ на числителя? — Полученная первая приближонная будетъ болѣе или менѣе настоящей дроби, и какъ найти разность между ними? — Какъ опредѣлить вторую, третью и т. д. приближонныя? — Вторая приближонная дробь будетъ болѣе или менѣе настоящей и почему? — А третья? — Какой законъ примѣчается относительно послѣдовательно-находимыхъ приближонныхъ дробей? — До какихъ поръ можетъ продолжаться нахожденіе приближонныхъ величинъ какой-либо несокращаемой дроби? — Что называется непрерывною дробью? — Когда данная для сокращенія дробь будетъ десятичная, то какъ поступить въ этомъ случаѣ?

1) Обратить простую дробь $^{163}/_{537}$ въ непрерывную.

2) Обратить простую дробь $^{401}/_{997}$ въ непрерывную.

3) Обратить простую дробь $^{1019}/_{2017}$ въ непрерывную.

4) Обратить простую дробь $^{1693}/_{2039}$ въ непрерывную.

5) Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая непрерывная:

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16}}}}$$

6) Обратить слѣдующую непрерывную дробь въ простую:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

7) Обратить слѣдующую непрерывную дробь въ простую:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+{}^{1}/_{10}}}}}$$

8) Опредѣлить четыре приближонныя величины слѣдующей простой дроби: $^{1769}/_{5537}$.

9) Опредѣлить первыя три приближонныя величины десятичной дроби 0,2039.

Десятичныя періодическія дроби въ отношеніи той простой дроби, отъ которой онѣ получаются, называются ея *приближонными*, а простая дробь, въ отношеніи своихъ приближенныхъ, ихъ *предѣломъ*. Очевидно, что первыя, по мѣрѣ увеличенія въ нихъ десятичныхъ знаковъ, все болѣе и болѣе приближаются къ своему предѣлу и всегда по одному и тому же закону, такъ что разность между приближонною и предѣломъ съ каждымъ новымъ десятичнымъ знакомъ уменьшается въ десять кратъ. Это нагляднѣе можно изобразить такъ:

$$^2/_3 = 0{,}6 + {}^2/_{300},$$
$$^2/_3 = 0{,}66 + {}^2/_{3000},$$
$$^2/_3 = 0{,}666 + {}^2/_{30000} \text{ и т. д.}$$

разности: $^2/_{300}$, $^2/_{3000}$, $^2/_{30000}$ все въ десять разъ уменьшаются.

Всегда можно отыскать такую періодическую десятичную дробь, разность между которою и простою дробью (ея предѣломъ) можетъ быть *менѣе всякой данной величины*. Положимъ надобно отыскать періодическую десятичную дробь, которой разность отъ простой дроби $^1/_7$ была бы менѣе $^1/_{1000000}$.

Дробь $^1/_7 = 0{,}1428571 + {}^1/_{10000000}$.

Примѣчаніе. Обыкновенно въ учебникахъ ариѳметики періодическія десятичныя дроби называются *безконечными;* но такое слово слѣдуетъ оставить, потому что, по ограниченности нашихъ чувствъ, всякая дѣлимость имѣетъ свои предѣлы, за которыми мышленіе наше останавливается.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

(ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ).

ПРОПОРЦІИ И ТРОЙНЫЯ ПРАВИЛА.

Общее примѣчаніе. Въ предыдущихъ трехъ отдѣлахъ изложена подробная теорія дробей, простыхъ, десятичныхъ и непрерывныхъ, а въ приложеніяхъ помѣщено такъ много различныхъ задачъ, что учащемуся представляется при этомъ полная возможность не только повторить и усвоить себѣ основательно все то, что изложено въ первомъ курсѣ этого руководства, но еще и пріобрѣсти надлежащій навыкъ во всякаго рода исчисленіяхъ надъ цифрами, сколько даже его требуется въ самыхъ сложныхъ и спѣшныхъ бухгалтерскихъ работахъ. Но кромѣ этой практической цѣли, въ предлежащемъ руководствѣ никогда не терялась изъ вида и цѣль научная; т. е. чтобы при всѣхъ переходахъ отъ извѣстнаго къ неизвѣстному, отъ частнаго къ общему всегда соблюдалась послѣдовательность въ мысляхъ, безъ скачковъ и перерывовъ, что такъ важно для каждаго, чтобъ усвоить себѣ и упрочить за собою навсегда логическій методъ «обобщеніе понятій». Съ помощію такого метода всякій переходъ отъ конкретнаго къ отвлеченному, поэтому и отъ ариѳметики къ алгебрѣ, не можетъ представить особой трудности, опредѣляя между прочимъ всякій разъ и границы для отвлеченнаго.

Итакъ, казалось бы здѣсь должно было покончить съ ариѳметикою. Но такъ какъ во многихъ ариѳметическихъ руководствахъ иныя сложныя задачи рѣшаются посредствомъ пропорцій и существуетъ довольно общее мнѣніе, что безъ нихъ обойтись нельзя, такъ что ихъ даже обязательно включаютъ въ учебныя программы, мнѣніе, котораго мы никакъ не раздѣляемъ, то чтобъ предлежащее руко-

водство не показалось неполнымъ и какъ-бы неоконченнымъ, мы изложимъ въ этомъ заключительномъ отдѣлѣ: во-первыхъ, теорію пропорцій; во-вторыхъ, сравнительныя рѣшенія задачъ какъ посредствомъ пропорцій, такъ и безъ нихъ; наконецъ, въ-третьихъ, различныя подраздѣленія такъ-называемыхъ тройныхъ правилъ на простыя и сложныя, правило товарищества и проч. Что касается до различныхъ подраздѣленій тройныхъ правилъ, то они еще менѣе нужны, чѣмъ пропорціи, и если указываемъ на нихъ, то единственно съ исторической точки зрѣнія что̀ именно разумѣли прежде подъ каждымъ изъ этихъ подраздѣленій. Учащіеся безъ всякаго затрудненія могутъ избирать для себя задачи изъ любой группы, вразбивку, нисколько не стѣсняясь означенными рубриками. Задача оттого не рѣшится скорѣе, когда только будемъ знать къ какому отдѣлу она относится: вся трудность въ ясномъ и точномъ разъясненіи себѣ тѣхъ запутанностей и сложностей, какія встрѣчаются иногда въ условіяхъ задачи, особенно между искомымъ и данными числами, а также, по возможности, въ краткости рѣшенія. Но то и другое зависитъ единственно отъ степени вниканія въ условія задачи и отъ умѣнья избѣгать длинныхъ и сложныхъ рѣшеній. Наконецъ, въ довершеніе всего, помѣщаемъ категорическія опредѣленія главныхъ понятій, входящихъ въ ариѳметику, выражающія вкратцѣ ея объемъ и содержаніе.

§ 42.

О ПРОПОРЦІЯХЪ.

Изъ предыдущихъ выкладокъ легко можно было замѣтить, что вообще числа сравниваются между собою съ двоякою цѣлію: чтобъ узнать, во-первыхъ, *чѣмъ* одно изъ нихъ болѣе или менѣе другаго, или, во-вторыхъ, *во сколько* разъ одно изъ нихъ болѣе или менѣе другаго. Выводы такихъ сравненій вообще называются *отношеніями*. Напримѣръ, сравнивая между собою числа 21 и 7, мы уже тѣмъ самымъ приводимъ ихъ во взаимное отношеніе. Такъ какъ выводы бываютъ двоякіе, то и отношенія должны быть двухъ родовъ. Тотъ выводъ (или число), который показываетъ *чѣмъ* одно число болѣе другаго, называется *разностнымъ отношеніемъ*, а тотъ, который показываетъ *во сколько кратъ* одно число болѣе другаго — отношеніемъ *кратнымъ*. Это потому, что въ первомъ случаѣ выводъ есть *разность* между двумя сравниваемыми числами, а во второмъ *крат-*

ное или *частное* число. Такъ между 21 и 7 разностное отношеніе есть число 14, а кратное число 3.

Примѣчаніе. Съ давнихъ временъ въ большей части руководствъ Ариѳметики перваго рода отношенія именуются *ариѳметическими*, а втораго — *геометрическими*.

Если разностное отношеніе между двумя числами опредѣляется разностію, а кратное частнымъ, происходящимъ отъ раздѣленія одного числа на другое (бо́льшаго на мѐньшее или мѐньшаго на бо́льшее), то и понятно, почему перваго рода отношенія обозначаются знакомъ вычитанія, а втораго—знакомъ дѣленія, то есть двоеточіемъ или чертою (въ видѣ дроби). Слѣдовательно разностное отношеніе между 21 и 7 должно представить такъ:

$$21 - 7,$$

а кратное такъ:

$$21 : 7$$

или $\frac{21}{7}$

Приведенныя въ отношеніе числа именуются его *членами:* первый *предыдущимъ*, а второй *послѣдующимъ*. Итакъ въ первомъ случаѣ числа 21 и 7 — члены разностнаго отношенія, а во второмъ кратнаго.

Чтобы разностное отношеніе между двумя какими-либо членами не измѣнялось, мы можемъ измѣнять эти члены только съ извѣстнымъ условіемъ, а именно: увеличивая, или уменьшая, первый членъ на какое-нибудь число, должны увеличить, или уменьшить, на такое же число и второй членъ; иначе между членами получится другое отношеніе, потому что перемѣнится разность. Впрочемъ и при такомъ условіи измѣненія можно получить сколько угодно паръ чиселъ, которыя будутъ имѣть одинаковое разностное отношеніе. Вотъ нѣсколько равныхъ разностныхъ отношеній:

$$21 - 7$$
$$25 - 11$$
$$37 - 23$$
$$48 - 34 \text{ и проч.}$$

Точно также равныхъ кратныхъ отношеній можно составить сколько угодно, потому что частное не измѣняется, когда дѣлимое и дѣлитель въ одинаковое число разъ увеличиваются или уменьшаются. Слѣдовательно

21 : 7
42 : 14
63 : 21
84 : 28 и проч.

или: $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{108}{36}$ и проч.

все равныя между собою кратныя отношенія, ибо частныя ихъ, которыя также называются *знаменателями* отношеній, равны между собою, именно составляютъ число 3.

Кратное отношеніе между какими-нибудь двумя дробными числами, напр. $^2/_3 : ^4/_5$, легко замѣнить равнымъ ему отношеніемъ между цѣлыми числами: стоитъ только обѣ дроби привести въ однородныя части, и потомъ отбросить знаменателей. Такъ

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12,$$

или, раздѣливъ послѣднія два числа на два, получимъ отношеніе 5 : 6. Слѣдовательно отношеніе $^2/_3 : ^4/_5$ можно замѣнить отношеніемъ 5 : 6.

Примѣчаніе. Кратное отношеніе иногда называется также *содержаніемъ*; ибо чрезъ него обозначается, сколько именно разъ одно число содержится въ другомъ. *Вопросъ.* Какое имѣютъ содержаніе числа 24 и 9? — *Отвѣтъ.* Содержаніе ихъ есть число $^{24}/_9$ или $2^2/_3$.

Равенство двухъ отношеній составляетъ *пропорцію*, которая, смотря потому, какія отношенія между собою уравнены, разностныя или кратныя, называется или *разностною* или *кратною пропорціею.*

Примѣчаніе. Пропорціи по роду отношеній, ихъ составляющихъ, называются также *ариѳметическими* и *геометрическими.*

Такъ какъ двѣ пары чиселъ: 21 и 7, 25 и 11 имѣютъ одинаковыя разности, то, соединяя ихъ посредствомъ знака равенства, получимъ разностную пропорцію

$$21 - 7 = 25 - 11$$

которая произносится такъ: 21 относится къ 7, какъ 25 къ 11.

Соединяя между собою два равныя кратныя отношенія, получимъ пропорцію кратную

$$21 : 7 = 42 : 14$$

И здѣсь также выговаривается: 21 относится къ 7, какъ 42 къ 14.

Очевидно, что каждая пропорція, разностная и кратная, состоитъ изъ четырехъ членовъ, которые по порядку, отъ лѣвой руки

къ правой, именуются: *первый, второй, третій, четвертый* члены. Изъ нихъ первый и четвертый называются еще *крайними*, а второй и третій — *средними*. Сверхъ того, первый и третій — *предыдущими*, а второй и четвертый *послѣдующими* (въ каждомъ отношеніи).

Если средніе члены въ пропорціи одинаковы, то она получаетъ еще названіе *непрерывной*.

$$\left.\begin{aligned} 29 - 23 &= 23 - 17 \\ 32 : 16 &= 16 : 8 \end{aligned}\right\} \text{непрерывныя пропорціи.}$$

Само собою разумѣется, что членами и разностной и кратной пропорціи могутъ быть не только цѣлыя числа, но и дробныя, лишь бы было между ними существенное свойство пропорціи, т. е. равенство отношеній. Напримѣръ:

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{4} = \frac{67}{84} - \frac{1}{3}$$

Здѣсь каждое изъ соединенныхъ отношеній $= \frac{13}{28}$.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{15} = \frac{1}{7} : \frac{2}{35}$$

Здѣсь знаменатель того и другаго отношенія $= 2\frac{1}{2}$.

Изъ самаго условія составленія разностной пропорціи понятно, что первый членъ ея такимъ же числомъ долженъ быть болѣе втораго, какимъ четвертый менѣе третьяго; поэтому, чтобы первый членъ уравнять второму, а четвертый третьему, надобно этотъ избытокъ отнять отъ перваго члена и приложить къ четвертому. Такимъ образомъ первый членъ съ четвертымъ всегда равняются второму члену съ третьимъ; т. е. *сумма крайнихъ членовъ въ разностной пропорціи всегда равна суммѣ среднихъ членовъ.*

Въ самомъ дѣлѣ

1) $33 - 28 = 10 - 5$

$33 + 5 = 28 + 10$

2) $19 - 54 = 7 - 42$

$19 + 42 = 54 + 7$

3) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{3}{4} - \frac{17}{60}$

$\frac{2}{3} + \frac{17}{60} = \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

Это свойство называется главнымъ свойствомъ разностной пропорціи, такъ какъ на немъ основываются перемѣщенія ея членовъ, а также отъискаціе котораго-нибудь изъ нихъ, принятаго за неизвѣстное число, когда прочіе три извѣстны.

а) Что касается до перемѣщенія членовъ разностной пропорціи, то перемѣщайте ихъ какъ вамъ угодно, лишь бы сохранялось главное ея свойство, т. е. что сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ членовъ.

Поэтому пропорцію

$$15 - 10 = 35 - 30$$

можно измѣнить такъ:

1) $10 - 15 = 30 - 35$, потому что $10 + 35 = 15 + 30$.

2) $35 - 15 = 30 - 10$

3) $35 - 30 = 15 - 10$

4) $10 - 30 = 15 - 35$

б) Нахожденіе котораго-либо изъ членовъ, принятаго за неизвѣстное число, также легко. Назовемъ неизвѣстное число буквою x и пусть будетъ дана пропорція

$$x - 19 = 57 - 18$$

Такъ какъ первый членъ съ послѣднимъ должны быть равны второму члену съ третьимъ, то неизвѣстное число вмѣстѣ съ 18 должно быть равно $19 + 57$ или 76, а одно неизвѣстное число, безъ 18, равно $76 - 18$ или 58.

Еще примѣры.

$$68 - x = 57 - 8$$
$$x + 57 = 68 + 8 = 76$$
$$x \text{ безъ } 57 = 76 - 57 = 19.$$

Въ непрерывной разностной пропорціи

$$48 - x = x - 36$$

неизвѣстное число, взятое дважды, равно $48 + 36$ или 84; слѣдовательно одно неизвѣстное число $x = 42$.

Примѣчаніе. Нахожденіе средняго члена въ непрерывной разностной пропорціи сходствуетъ съ нахожденіемъ средняго числа между какими-либо данными числами (§ 47-й 1-й книги).

Отсюда общее правило: *для отысканія крайняго члена разностной пропорціи надобно изъ суммы среднихъ членовъ вычесть другой крайній, а для отысканія средняго, изъ суммы крайнихъ членовъ отнять другой средній.*

Въ кратной пропорціи главное свойство другое: въ ней не сумма, а *произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ,* что впрочемъ и должно быть по самому способу ея составленія.

Чтобы разъяснить себѣ это свойство, припомнимъ, что всякую кратную пропорцію можно представить въ видѣ равенства дробей.

Такъ $15 : 5 = 27 : 9$

все тоже, что

$$\frac{15}{5} = \frac{27}{9}$$

Но эти дроби, будучи приведены къ одинаковому знаменателю, примутъ такой видъ:

$$\frac{15 \times 9}{5 \times 9} = \frac{27 \times 5}{9 \times 5}$$

или если отбросить знаменателей, то получится слѣдующее равенство: $15 \times 9 = 27 \times 5$; т. е. произведеніе перваго и четвертаго членовъ равно произведенію втораго и третьяго.

На этомъ свойствѣ основываются и всѣ возможныя перемѣщенія членовъ, также различныя измѣненія пропорціи и отысканіе въ ней котораго-либо изъ членовъ, принятаго за неизвѣстное число.

1) Изъ пропорціи

$$7 : 13 = 35 : 65$$

можно составить такую:

$$13 : 7 = 65 : 35;$$

потому что $13 \times 35 = 7 \times 65$.

Итакъ *послѣдующіе члены кратной пропорціи можно ставить на мѣсто предыдущихъ, а предыдущіе на мѣсто послѣдующихъ;* ни въ томъ, ни въ другомъ случаѣ равенство между отношеніями не измѣнится.

2) Если существуетъ пропорція

$$7 : 13 = 35 : 65,$$

то можетъ быть и такая:

$$7 : 35 = 13 : 65;$$

ибо $7 \times 65 = 35 \times 13$

Значитъ *можно перемѣщать средніе члены.*

3) Если

$$7 : 13 = 35 : 65,$$

то можетъ быть и такъ:

$$35 : 65 = 7 : 13$$

т. е. *второе отношеніе можно ставить на мѣсто перваго, и обратно.*

4) Очевидно, что можетъ быть и такая пропорція:

$$65 : 35 = 13 : 7;$$

т. е. *можно всѣ члены перемѣстить по порядку отъ четвертаго къ первому.*

5) Если существуетъ какая-либо пропорція

$$2 : 3 = 8 : 12,$$

то ее можно, во-первыхъ, изобразить такъ:

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12},$$

а потомъ, во-вторыхъ, члены первой дроби умножить на какое-либо число, а члены второй раздѣлить на одно и то же число (ибо извѣстно, что значеніе дробей отъ этого не измѣнится).

Отсюда получимъ

$$\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{8:2}{12:2},$$

или

$$2\times 5:3\times 5={}^{8}/_{2}:{}^{12}/_{2};$$

т. е. *предыдущіе члены съ своими послѣдующими, въ каждомъ отношеніи, всегда могутъ быть помножены или раздѣлены на одно и то же число.*

5) Если есть пропорція

$$7:9=21:27,$$

то обративъ ее въ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{7}{9}=\frac{21}{27}$$

и прибавивъ къ обѣимъ равнымъ частямъ по единицѣ, получимъ

$$\frac{7}{9}+1=\frac{21}{27}+1,$$

или

$$\frac{7+9}{9}=\frac{21+27}{27},$$

или

$$7+9:9=21+27:27;$$

т. е. *сумма двухъ первыхъ членовъ относится ко второму (также и къ первому), какъ сумма двухъ послѣднихъ членовъ относится къ четвертому члену (также и къ третьему).*

8) Изъ одной и той же пропорціи

$$7:9=21:27$$

можно имѣть еще слѣдующія:

$$7+21:\ 7=\ 9+27:\ 9$$
$$7+21:21=\ 9+27:27$$
$$21-\ 7:21=27-\ 9:27$$
$$21-\ 7:\ 7=27-\ 9:\ 9$$

Во всѣхъ этихъ пропорціяхъ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ; т. е. главное свойство соблюдено.

9) Возьмемъ нѣсколько пропорцій, *имѣющихъ одинаковыхъ знаменателей отношенія:*

$$5 : 10 = 3 : 6$$
$$4 : 8 = 7 : 14$$
$$9 : 18 = 10 : 20;$$

представимъ ихъ въ видѣ дробей:

$$\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{7}{14}$$
$$\frac{9}{18} = \frac{10}{20}$$

и опредѣлимъ изъ этихъ дробей числителей 5, 4, 9.

$$5 = \frac{3}{6} \times 10 \text{ или } {}^1/_2 \times 10$$
$$4 = \frac{7}{14} \times 8 \text{ или } {}^1/_2 \times 8$$
$$9 = \frac{10}{20} \times 18 \text{ или } {}^1/_2 \times 18$$

слѣдовательно

$$5 + 4 + 9 = {}^1/_2 \times (10 + 8 + 18)$$

А это можно преобразить такъ:

$$\frac{5 + 4 + 9}{10 + 8 + 18} = \frac{1}{2},$$

что даетъ пропорцію:

$$5 + 4 + 9 : 10 + 8 + 18 = 1 : 2 \text{ или } 3 : 6 \text{ или } 7 : 14 \text{ или } 10 : 20;$$

т. е. *сумма всѣхъ первыхъ членовъ относится къ суммѣ всѣхъ вторыхъ членовъ, какъ третій членъ къ своему четвертому (каждой изъ данныхъ пропорцій).*

10) Возьмемъ еще нѣсколько пропорцій, которыхъ знаменатели даже неравны между собою:

$$2 : 3 = 6 : 9$$
$$4 : 8 = 10 : 20$$
$$7 : 21 = 5 : 15,$$

представимъ ихъ въ видѣ равенства дробей:

$${}^2/_3 = {}^6/_9$$
$${}^4/_8 = {}^{10}/_{20}$$
$${}^7/_{21} = {}^5/_{15}$$

Изъ равныхъ сомножителей составляются, какъ извѣстно, равныя произведенія; поэтому

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{8} = \frac{6}{9} \times \frac{10}{20}$$

$$\text{и } \frac{2}{3} \times \frac{4}{8} \times \frac{7}{21} = \frac{6}{9} \times \frac{10}{20} \times \frac{5}{15},$$

$$\text{или } \frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 8 \times 21} = \frac{6 \times 10 \times 5}{9 \times 20 \times 15},$$

$$\text{или } 2 \times 4 \times 7 : 3 \times 8 \times 21 = 6 \times 10 \times 5 : 9 \times 20 \times 15;$$

т. е. *если нѣсколько пропорцій перемножить между собою почленно, хотя бы онѣ имѣли и разныхъ знаменателей отношенія, то изъ произведеній составится также пропорція.*

Отысканіе неизвѣстнаго члена кратной пропорціи по тремъ извѣстнымъ или даннымъ числамъ основывается, какъ уже сказано выше, на томъ же главномъ свойствѣ.

Неизвѣстнымъ числомъ можетъ быть или одинъ изъ крайнихъ членовъ или одинъ изъ среднихъ; а потому, изобразивъ неизвѣстный или искомый членъ буквою х, мы можемъ имѣть слѣдующіе четыре вида пропорціи:

$$x : 13 = 35 : 65$$
$$7 : x = 35 : 65$$
$$7 : 13 = x : 65$$
$$7 : 11 = 35 : x$$

Въ первой пропорціи число x, взятое 65 разъ, равно 13×35 или 455; слѣдовательно одно число $x = \frac{455}{65} = 7$.

Во второй $x = \frac{7 \times 65}{35} = 13$.

Въ третьей $x = \frac{7 \times 65}{13} = 35$.

Въ четвертой $x = \frac{13 \times 35}{7} = 65$.

Общее правило: *каждый изъ крайнихъ членовъ кратной пропорціи найдется, когда произведеніе среднихъ членовъ раздѣлится на другой крайній, а каждый изъ среднихъ членовъ, когда произведеніе изъ крайнихъ раздѣлится на другой средній.*

Изложенныя здѣсь свойства пропорцій обыкновенно и прилагаются къ рѣшенію задачъ.

§ 42.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРОСТОМУ ТРОЙНОМУ ПРАВИЛУ.

Дѣйствіе, по которому искомое число въ задачѣ опредѣляется именно изъ пропорціи, составляемой изъ этого искомаго и другихъ данныхъ или извѣстныхъ чиселъ, называется *простымъ тройнымъ правиломъ*. Если же для опредѣленія искомаго числа требуется вывести нѣсколько кратныхъ пропорцій, притомъ зависящихъ одна отъ другой, то тройное правило именуется *сложнымъ*. Это дѣйствіе названо тройнымъ правиломъ потому, что въ каждой пропорціи, выводимой изъ условій задачи, три числа извѣстны.

Задача тогда только принадлежитъ къ тройному правилу, когда въ ней искомая величина именно такъ соединена съ другими данными, что онѣ вмѣстѣ составляютъ пропорцію. Слѣдовательно прежде надобно найти эту пропорціональность, а потомъ уже по вышепоказанному способу опредѣлить и искомую величину. Это очевиднѣе на слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. На 40 рублей куплено муки 6 кулей; сколько можно купить муки на 75 рублей?

Рѣшеніе. Въ предложенномъ примѣрѣ находятся три извѣстныя именнованныя числа, а четвертое искомое; притомъ послѣднее однородно съ 6 кулями, два другія (40 р. и 75 р.) также однородны между собою. Первыя два числа составляютъ одно отношеніе, а послѣднія два другое, и тотчасъ видно, что оба эти отношенія равны между собою; ибо если на 40 рублей куплено муки 6 кулей, то на 75 рублей можно купить болѣе, и во столько разъ болѣе во столько 75 руб. болѣе 40 рублей. Слѣдовательно составляется такая пропорція:

$$x \text{ кулей} : 6 \text{ кул.} = 75 \text{ руб.} : 40 \text{ руб.}$$

Примѣчаніе. При составленіи пропорціи наблюдается, чтобы въ одно отношеніе входили однородныя между собою величины; такъ здѣсь въ первомъ отношеніи находятся кули, а во второмъ рубли.

Когда пропорція такимъ образомъ составлена, то по даннымъ правиламъ отыскивается въ ней неизвѣстный членъ. Здѣсь этотъ членъ стоитъ первымъ и онъ равенъ произведенію среднихъ, раздѣленному на четвертый членъ.

Примѣчаніе. Конечно при этомъ случаѣ у учащагося можетъ родится вопросъ: какимъ образомъ 6 кулей умножить на 75 рублей,

и что произойдетъ: рубли или кули? — но когда пропорція составлена, то члены ея принимаются за числа простыя, т. е. безъ означенія, что̀ именно они изображаютъ. Равномѣрно требуется, *чтобы, при составленіи пропорціи изъ именованныхъ чиселъ, всегда имѣть въ виду, что два средніе члена должны быть разныхъ родовъ, а также и два крайніе.*

Итакъ

$$x = \frac{6 \times 75}{40} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 5} =$$

$$\frac{3 \times 15}{4} = \frac{45}{4} = 11^1/_4.$$

Такимъ образомъ мы узнали, что на 75 рублей можно купить муки $11^1/_4$ куля.

Такія задачи, какъ эта, въ которой искомая величина (здѣсь кули) должна быть *во столько же разъ болѣе* другой однородной съ нею величины, *во сколько разъ* третья величина *болѣе* четвертой, относятъ *къ прямому тройному правилу.* Далѣе увидимъ, какія задачи относятся къ обратному тройному правилу.

Эта задача безъ употребленія пропорцій рѣшается такъ:

Когда на 40 рублей куплено 6 кулей муки, то на 1 руб. можно купить муки въ 40 разъ менѣе, именно

$$\frac{6}{40} \text{ куля},$$

а на 75 руб. въ 75 разъ болѣе, т. е.

$$\frac{6 \times 75}{40} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 5} = \frac{45}{4} = 11^1/_4$$

Примѣръ 2. На пару платья употреблено сукна $4^1/_4$ аршина, шириною въ $1^3/_4$ аршина. Сколько нужно употребить сукна, котораго ширина 2 арш., на такое же платье?

На платье должно употребить сукна *менѣе* $4^1/_4$ аршина во столько разъ, во сколько 2 аршина *болѣе* $1^3/_4$ аршина; ибо чѣмъ шире сукно, тѣмъ его менѣе пойдетъ на платье. Поэтому искомая величина должна относиться къ $4^1/_4$ арш., какъ $1^3/_4$ арш. относятся къ 2 арш. Отсюда пропорція

$$x : 4^1/_4 = 1^3/_4 : 2.$$

Такъ какъ здѣсь искомая величина x находится въ *обратномъ* отношеніи къ ширинѣ сукна (вкратцѣ: чѣмъ больше, чѣмъ меньше),

что отношенія поставлены въ обратномъ порядкѣ. Задачи такого рода относятся *къ обратному тройному правилу.*

$$x = \frac{4^1/_4 \times 1^3/_4}{2} = \frac{17 \times 7}{2 \times 4 \times 4} = 3^{23}/_{32} \text{ ар.} = 3 \text{ ар. } 11^1/_2 \text{ вершк.}$$

Рѣшеніе безъ пропорцій. Чѣмъ шире сукно, тѣмъ менѣе пойдетъ его на платье, и наоборотъ. Еслибъ вмѣсто $1^3/_4$ арш. или $^7/_4$ арш., сукно было шириною въ 1 арш., то его пошло бы на платье въ $1^3/_4$ раза болѣе $4^1/_4$ арш., т. е.

$$4^1/_4 \times 1^3/_4$$

Но оно шириною въ 2 арш., поэтому его пойдетъ вдвое менѣе этого послѣдняго количества, именно:

$$\frac{4^1/_4 \times 1^3/_4}{2},$$

или $\frac{17 \times 7}{2 \times 4 \times 4} = 3^{23}/_{32}$ арш. $= 3$ арш. $11^1/_2$ вершк.

Вотъ еще задачи, рѣшенныя безъ помощи пропорцій.

Примѣръ 3-й. 15 человѣкъ оканчиваетъ извѣстную работу въ 8 дней. Сколько надобно людей, чтобы ту же работу окончить въ $6^2/_3$ дня?

Рѣшеніе. Если для окончанія извѣстной работы въ 8 дней надобно имѣть 15 работниковъ, то чтобъ окончить эту работу въ 1 день потребовалось бы въ 8 разъ болѣе работниковъ; т. е, 8×15. Но на совершеніе работы назначено $6^2/_3$ дня, поэтому и число работниковъ должно быть также менѣе въ $6^2/_3$ раза.

Такимъ образомъ

$$x \text{ (искома величина)} = \frac{8 \times 15}{^{20}/_3} = \frac{8 \times 15 \times 3}{20} =$$

$$= \frac{2 \times 4 \times 5 \times 3 \times 3}{4 \times 5} = 2 \times 3 \times 3 = 18 \text{ работ.}$$

Примѣръ 4. На корабль провіанта для служителей только на 10 дней, а корабль долженъ пробыть въ морѣ 15 дней. Чѣмъ надобно уменьшить ежедневную порцію провіанта, чтобы его достало на 15 дней?

Отвѣтъ. Служители на кораблѣ, вмѣсто полной порціи, должны получать такую же часть ея, какую 10 составляетъ отъ 15, именно $^2/_3$ порціи. Слѣдовательно ежедневная порція должна быть уменьшена на *одну треть.*

§ 43.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) За два четверика пшеницы дано 3 рубля; сколько можно получить пшеницы, по той же цѣнѣ, на $^3/_4$ рубля?

2) За 25 арш. полотна заплачено $30^5/_6$ рубля; что должно заплатить за $4^{11}/_{16}$ аршина?

3) Въ $^5/_6$ года пріобрѣтено однимъ мастеровымъ 480 рублей $12^{11}/_{12}$ коп. Сколько онъ могъ пріобрѣсть такимъ образомъ въ 12 лѣтъ?

4) Что стоитъ $^1/_6$ арш. сукна, когда за $^3/_4$ аршина дано $18^7/_8$ рубля?

5) Если отъ неизвѣстнаго числа отнимемъ 2,59, то остатокъ будетъ во столько разъ болѣе $23^2/_3$, во сколько разъ 3,01 болѣе 0,99. Найти неизвѣстное число.

6) Если съ 3 десятинъ покоса получено 105 пяти-пудовыхъ кучъ сѣна, то сколько можно получить пудовъ съ 13 десятинъ одинаковаго покоса?

7) Тройное неизвѣстное число во столько разъ болѣе 517, во сколько $7^1/_2$ менѣе $11^3/_4$ Найти неизвѣстное число.

8) Если неизвѣстное число раздѣлить на $^2/_3$, то частное будетъ во столько разъ болѣе $5^3/_7$, во сколько разъ $^5/_6$ менѣе 1,271. Найти неизвѣстное число.

9) Нѣкто долженъ столько денегъ, что еслибъ онъ уплачивалъ въ каждый мѣсяцъ по $87^1/_2$ руб., то кончилъ бы долгъ свой въ 13 мѣсяцевъ; но онъ ежемѣсячно уплачиваетъ только по 45 рублей. Во сколько времени онъ заплатитъ свой долгъ?

10) Одна женщина изъ своей пряжи выткала 40 арш. холста, шириною въ 1 арш. 5 вершковъ. Сколько бы вышло аршинъ холста изъ той же пряжи, когда бы холстъ былъ шириною въ $^3/_4$ аршина?

11) Если $^3/_4$ ласта пшеницы стоятъ 72 рубля, то что должно заплатить за 5 четвертей?

12) Если ткачъ, выткавъ $108^1/_2$ арш. холста, взялъ за 30 арш. $^{108}/_{16}$ рублей, то сколько онъ получитъ за весь холстъ?

13) Съ 3500 рублей получено въ 57 дней 114 рублей прибыли. Во сколько времени получится та же самая прибыль съ 1000 рублей?

14) Нѣкто, нанявъ работника на 8 мѣсяцевъ за 50 р., долженъ былъ отпустить его отъ себя по прошествіи $2^1/_2$ недѣль. Сколько было заплачено работнику по этому расчету?

15) Нѣкто заплатилъ $^2/_3$ своего долга и на немъ еще осталось 428 руб. $15^3/_4$ коп. Какъ великъ весь его долгъ?

16) 6000 солдатъ получили провіанта на $3^3/_5$ мѣсяца; но къ нимъ вдругъ прибыло еще 1200 солдатъ, которыхъ велѣно доволь-

ствовать тѣмъ же провіантомъ. Насколько времени станетъ теперь полученнаго провіанта?

17) Нѣкто сказалъ: если я ежедневно буду издерживать по $^3/_8$ рубл., то всѣ свои деньги издержу въ $^5/_{12}$ года. По сколько онъ долженъ бы былъ тратить ежедневно, когда бы всѣ свои деньги захотѣлъ издержать въ $^3/_4$ года?

18) Колесо, имѣющее въ окружности $8^3/_4$ фута, оборотилось на нѣкоторомъ разстояніи $86^1/_2$ разъ. Сколько разъ обернется потому же разстоянію колесо, котораго окружность $12^5/_6$ фута.

19) На раздачу бѣднымъ была отпущена нѣкоторая сумма денегъ. Когда насчитали бѣдныхъ 18 человѣкъ, тогда на каждаго изъ нихъ приходилось по $2^1/_4$ рубля; но вдругъ бѣдныхъ увеличилось въ $3^1/_2$ раза. По сколько получитъ каждый бѣдный?

20) Два купца мѣнялись товарами: одинъ промѣнялъ другому 47 пудъ 18 фунт. желѣза на соль, считая каждый пудъ желѣза въ 2 руб. 86 коп. серебромъ. Спрашивается: сколько другой купецъ долженъ былъ отдать первому за желѣзо солью, считая пудъ послѣдней въ $62^1/_2$ коп. серебромъ?

§ 44.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ СЛОЖНОМУ ТРОЙНОМУ ПРАВИЛУ.

Въ задачи простаго тройнаго правила обыкновенно входятъ, какъ могли замѣтить, три числа, которыя такъ соединены съ искомымъ четвертымъ, что составляютъ съ нимъ пропорцію; но, если въ задачу входитъ болѣе условій, слѣдовательно и болѣе чиселъ, напримѣръ: пять, семь, девять и т. д., которыя всѣ имѣютъ отношеніе къ искомому числу, то очевидно, что непосредственно одною пропорціею послѣдняго опредѣлить нельзя, а необходимо для этого составить нѣсколько пропорцій, выводя ихъ одну изъ другой. Такія-то задачи и относятъ къ сложному тройному правилу.

30 работниковъ въ 15 дней, работая каждый день по 9 часовъ, сдѣлали мостовую въ 25 сажень длиною и въ 5 сажень шириною. Спрашивается: во сколько дней 45 работниковъ окончать мостовую въ 60 сажень длиною и въ 6 сажень шириною, работая ежедневно по 12 часовъ?

Рѣшеніе. Пусть x искомое число дней работы. Напишемъ, для лучшаго обозрѣнія чиселъ, однородныя величины подъ однородныя.

30 работ.	15 дней	9 час.	25 саж. длины	5 саж. шир.
45 »	x »	12 »	60 » »	6 » »

Если 30 работниковъ, работая по 9 часовъ въ день, сдѣлали мостовую въ 15 дней, то 45 работниковъ, работая по столько же часовъ въ день, сдѣлаютъ ее скорѣе, и во столько разъ скорѣе, во сколько разъ 45 болѣе 30. Отсюда выходитъ пропорція:

$$45 : 30 = 15 : x \ldots (1)$$
$$x = \frac{30 \times 15}{45} = \frac{3 \times 10 \times 15}{3 \times 15} = 10 \text{ дн.}$$

Но если 45 работниковъ окончатъ въ 10 дней мостовую, работая по 9 часовъ въ день, то, работая по 12 часовъ, окончатъ ее еще скорѣе, именно во столько скорѣе, во сколько 12 болѣе 9. Здѣсь получается обратная пропорція:

$$12 : 9 = 10 : x' \ldots (2)$$
$$x' = \frac{9 \times 10}{12} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7^1/_2 \text{ дн.}$$

45 работниковъ тогда только окончатъ работу въ $7^1/_2$ дней, когда мостовая будетъ имѣть длины 25 саженъ; для обработки же мостовой длиною въ 60 саженъ понадобится времени болѣе, и во столько разъ болѣе, во сколько 60 болѣе 25.

$$25 : 60 = {}^{15}/_2 : x'' \ldots (3)$$
$$x'' = \frac{60 \times 15}{2 \times 25} = \frac{2 \times 6 \times 5 \times 3 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = 18 \text{ днямъ.}$$

Мостовая, кромѣ того, должна быть шире прежней въ отношеніи чиселъ 6 : 5. Слѣдовательно 45 работниковъ сдѣлаютъ требуемую мостовую во столько разъ болѣе 18 дней, во сколько 6 болѣе 5.

$$5 : 6 = 18 : x''' \ldots (4)$$
$$x''' = \frac{6 \times 18}{5} = \frac{108}{5} = 21^3/_5 \text{ дня.}$$

Итакъ искомое число дней работы $21^3/_5$.

При сокращенномъ рѣшеніи той же задачи, составляются послѣдовательно пропорціи для искомыхъ величинъ: x, x', x'', x''', и когда эти пропорціи составлены, то, не выводя изъ нихъ неизвѣстныхъ, только подписываютъ одну пропорцію подъ другую и почленно перемножаютъ. Вотъ такъ:

$$45 : 30 = 15 : x$$
$$12 : 9 = x : x'$$
$$25 : 60 = x' : x''$$
$$5 : 6 = x'' : x'''$$
$$45 \times 12 \times 25 \times 5 : 30 \times 9 \times 60 \times 6 = 15 : x'''$$
$$x''' = \frac{15 \times 30 \times 9 \times 60 \times 6}{45 \times 12 \times 25 \times 5}$$
$$= \frac{3 \times 6 \times 6}{5} = 21^{3}/_{5} \text{ дня.}$$

При этомъ наблюдается, чтобы неизвѣстныя или искомыя величины были размѣщены такимъ образомъ, что когда въ одной пропорціи величина x составляетъ четвертый членъ, то въ слѣдующей она составляла бы третій членъ; тоже и величины x', x''. По такомъ размѣщеніи неизвѣстныхъ величинъ, онѣ, по умноженіи пропорцій почленно, уничтожатся въ производной пропорціи, такъ что останется только величина x'''.

Рѣшеніе той же задачи безъ употребленія пропорцій.

Когда 30 человѣкъ въ 15 дней оканчиваютъ извѣстную работу, то 1 человѣкъ долженъ употребить на нее въ 30 разъ болѣе времени.

Итакъ 1 человѣкъ въ 15×30 дней окончитъ мостовую въ 25 саженъ длинною и 5 саж. шириною, работая въ день по 9 часовъ. Но еслибъ онъ работалъ только по 1 часу въ день, то на ту же работу употребилъ бы еще въ 9 разъ болѣе времени; т. е.

$$15 \times 30 \times 9 \text{ дней.}$$

Когда же мостовая, вмѣсто 25 саженъ длины и 5 саженъ ширины, была бы длиною и шириною въ 1 сажень, то 1 работникъ окончилъ бы ее въ 25×5 разъ скорѣе:

въ $\frac{15 \times 30 \times 9}{25 \times 5}$ дней, работая ежедневно по одному часу.

Поэтому 45 работниковъ, работая ежедневно по 1 часу, окончили бы ее въ 45 разъ скорѣе; т. е.

$$\text{въ } \frac{15 \times 30 \times 9}{25 \times 5 \times 45} \text{ дней.}$$

А работая ежедневно по 12 часовъ, еще бы скорѣе въ 12 разъ, что выразится такъ:

$$\frac{15 \times 30 \times 9}{25 \times 5 \times 45 \times 12} \text{ дней.}$$

Но какъ мостовая должна имѣть длины 60 саженъ и ширины 6 саженъ, то 45 работниковъ должны работать въ 60×6 разъ болѣе того, когда бы мостовая была длинною и шириною въ 1 сажень.

Слѣдовательно

$$x = \frac{15 \times 30 \times 9 \times 60 \times 6}{25 \times 5 \times 45 \times 12} = \frac{6 \times 5 \times 3}{5} = 21^3/_5 \text{ дня.}$$

Вотъ еще задачи, такимъ же образомъ рѣшенныя:

Нѣкто въ пять дней, находясь въ дорогѣ по 8 часовъ въ день прошелъ 120 верстъ. Спрашивается: сколько бы верстъ прошелъ онъ въ 15 дней, когда бы находился ежедневно въ дорогѣ по 6 часовъ?

Если въ 5 дней, находясь въ дорогѣ по 8 часовъ ежедневно, онъ прошелъ 120 верстъ, то значитъ въ день онъ проходилъ по $^{120}/_5$ верстъ, а въ часъ по $\frac{120}{5 \times 8}$ верстъ. Поэтому, употребивъ на ходьбу 15 дней и ежедневно по 6 часовъ, онъ могъ бы пройти въ 15×6 разъ болѣе верстъ. Итакъ

$$x = \frac{120 \times 15 \times 6}{5 \times 8} = 3 \times 15 \times 6 = 270 \text{ верстъ.}$$

Въ 42 дня, работая ежедневно по 8,5 часа, 15 человѣкъ соткали сукна 250,6 аршина; сколько часовъ въ день по этому расчету должны работать 30 человѣкъ, чтобы въ 21 день соткать 125,3 аршина?

Ясно, что 1 человѣкъ окончилъ бы 250,6 аршина въ $15 \times 42 \times 8{,}5$ часовъ, а 1 аршинъ въ 250,6 скорѣе; т. е.

$$\text{въ } \frac{15 \times 42 \times 8{,}5}{250{,}6}$$

Слѣдовательно, чтобы соткать 125,3 арш., ему нужно бы было времени въ 125,3 разъ болѣе, а 30 работникамъ, при распредѣленіи работы на 21 день, надобно бы было въ 30×21 разъ менѣе часовъ.

$$\text{Отсюда } x = \frac{15 \times 42 \times 8{,}5 \times 125{,}2}{250{,}6 \times 30 \times 21} = 4{,}25 \text{ часа.}$$

§ 45.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) 6 каменьщиковъ склали въ пять дней стѣну въ 11 аршинъ длины, которой вышина была 9 футовъ, а толщина 2 фута. Сколько аршинъ стѣны, такой же вышины и толщины, могутъ сдѣлать 10 каменьщиковъ въ 2 рабочихъ недѣли и 4 дня?

2) Партія плотниковъ, работая ежедневно по 11 часовъ, получаетъ за каждую рабочую недѣлю 125 рублей 50 коп. Сколько по этому расчету та же партія должна получить денегъ за $2^2/_3$ мѣсяца, считая въ мѣсяцѣ 25 рабочихъ дней, если она будетъ ежедневно работать $2^1/_2$ часами болѣе?

3) Когда на 35 паръ платья пошло сукна 140 арш., шириною въ 1 арш. 4 вершк., то сколько пойдетъ сукна на 45 такихъ же паръ платья, котораго ширина 1 арш. 14 вершковъ?

4) За перевозку клади въ $14^3/_4$ пуда, за $100^1/_2$ верстъ, одинъ купецъ заплатилъ извощику 20 рубл. Сколько должно заплатить за перевозку клади вѣсомъ въ $25^1/_2$ пудовъ, черезъ 124 версты?

5) 6 ткачей, въ $2^1/_2$ дня, выткали $62^3/_4$ аршина холста. Сколько такого же холста выткутъ 4 ткача въ $5^3/_4$ дня?

6) Если 14 лошадей, въ 20 дней, получаютъ 15 четвертей $2^1/_2$ четверика овса, то сколько потребно овса для 20 лошадей на 1 мѣсяцъ 26 дней?

7) Каменьщикъ получилъ за выдѣлку стѣны, которой длина 6 аршинъ, ширина $2^1/_2$ арш. и высота $4^3/_4$ арш., $9^3/_5$ рубля. Сколько онъ долженъ получить за выдѣлку другой стѣны, которой длина 30 арш., ширина или толщина $1^3/_4$ аршина, а вышина 6 аршинъ?

8) 16 человѣкъ, въ $6^1/_2$ мѣсяцевъ, издержали 780 руб. $24^2/_3$ коп. Сколько по этому расчету издержатъ 26 человѣкъ въ круглый годъ?

9) На 200 паръ платья нужно сукна $600^3/_4$ аршинъ, котораго ширина 1 аршинъ 14 вершковъ. Какой ширины должно быть сукно, котораго куплено 160 аршинъ на 50 паръ такой же величины платья?

10) На крѣпостной гарнизонъ, состоявшій изъ 672 человѣкъ, заготовлено было провіанта на 6 мѣсяцевъ, считая на каждаго ежедневно по 1 фунту 22 лота. Но въ крѣпость прибыло еще 112 человѣкъ, и съ прибытіемъ ихъ приказано уменьшить ежедневную порцію каждаго человѣка 9 лотами. На сколько времени станетъ теперь заготовленнаго провіанта, если вновь прибывшихъ въ крѣпость нужно продовольствовать тѣмъ же провіантомъ?

11) 10 башмачниковъ, въ $4^1/_2$ дня, работая ежедневно по 7 часовъ, сдѣлали 25 паръ башмаковъ. Сколько 12 башмачниковъ въ $8^7/_{12}$ дня сдѣлаютъ паръ башмаковъ, если станутъ работать ежедневно по $5^1/_2$ часовъ?

12) Сколько нужно нанять плотниковъ для срубки дома, съ условіемъ, чтобъ они, работая въ день по 9 часовъ, выстроили его въ $160^1/_2$ дней, когда такой же домъ 28 человѣкъ, работая ежедневно по 5 часовъ, срубили въ 275 дней?

13) Трое сдѣлали нѣкоторое дѣло въ 45 дней, работая ежедневно по 10 часовъ. Сколько нужно людей, чтобы покончить дѣло, которое въ $3^1/_2$ раза труднѣе перваго, въ 25 ночей, если они будутъ каждую ночь работать по 7 часовъ, причемъ трудность работы ночью относится къ трудности работы днемъ, какъ 9 : 7?

14) Когда 4 писаря въ $5^3/_4$ дня написали рукопись въ 240 страницъ, въ каждой изъ которыхъ по 25 строкъ: то въ какое время трое писарей, съ такимъ же прилежаніемъ и искусствомъ въ письмѣ, перепишутъ рукопись въ 500 страницъ, изъ которыхъ въ каждой по 32 строки, причемъ трудность письма послѣдней рукописи относится къ трудности письма первой какъ 11 : 8?

15) 45 человѣкъ нарубили дровъ $220^1/_3$ сажени въ 16 дней. Сколько саженъ дровъ нарубятъ 56 человѣкъ въ 32 дня, работая въ $1^1/_2$ раза прилежнѣе и въ такомъ мѣстѣ, гдѣ рубка дровъ вдвое труднѣе первой?

16) 42 человѣка въ $1^3/_4$ дня вырыли земли $50^1/_2$ кубичныхъ саженъ, работая ежедневно по $5^5/_6$ часа. Сколько кубичныхъ саженъ выроютъ 70 человѣкъ въ $7^1/_4$ дня, работая ежедневно по $10^1/_6$ часа, если предположить такой же грунтъ?

17) 70 человѣкъ въ $1^3/_4$ мѣсяца, работая въ каждые 3 дня по 16 часовъ, сдѣлали 700 кусковъ сукна, каждый шириною $^7/_8$ аршина и длиною 40 аршинъ. Спрашивается: въ какое время 80 человѣкъ, которые въ $1^1/_2$ раза прилежнѣе первыхъ, сдѣлаютъ 125 кусковъ такой же доброты сукна, котораго ширина $^3/_4$ аршина, а длина 60 аршинъ, и притомъ если они станутъ употреблять на работу въ каждые три дня по 23 часа?

18) 10 человѣкъ, работая ежедневно по 8 часовъ, сдѣлали нѣкоторое дѣло въ 6 дней. Въ какое время 25 человѣкъ, работая ежедневно по 10 часовъ, и которые въ $1^1/_2$ раза сильнѣе первыхъ, сдѣлали 8 дѣлъ *вчетверо* труднѣйшихъ?

§ 46.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРАВИЛУ ТОВАРИЩЕСТВА.

Правило товарищества имѣетъ цѣлью раздѣлять между двумя или нѣсколькими лицами, вступившими въ товарищество для какого-либо торговаго предпріятія, получаемую ими прибыль или убыль, сообразно со вкладомъ каждаго. Отсюда оно и получило свое названіе. Но, вообще говоря, въ задачахъ, которыя относятъ къ этому правилу, все дѣло состоитъ *въ раздѣленіи даннаго числа на части, соразмѣрныя какимъ-либо другимъ даннымъ числамъ.*

Положимъ, что требуется раздѣлить число 60 на двѣ части, соразмѣрно (пропорціонально) числамъ 5 и 7.

Такъ какъ части эти неизвѣстны, то одну изъ нихъ полагаютъ равной числу x, а другую y. По заданію одно число должно относиться къ другому, какъ 5 относится къ 7; слѣдовательно составится такая пропорція:

$$5 : 7 = x : y$$

Но изъ этой пропорціи можно составить и такую:

$$5 + 7 : 5 = x + y : x; \text{ а какъ } x + y = 60,$$
$$\text{то } 12 : 5 = 60 : x.$$

Отсюда получается

$$x = \frac{5 \times 60}{12} = 5 \times 5 = 25.$$

Изъ первой же пропорціи составляется еще:

$$5 + 7 : 7 = x + y : y$$
$$\text{или} \quad 12 : 7 = 60 : y$$

Слѣдовательно

$$y = \frac{7 \times 60}{12} = 35.$$

Такимъ образомъ число 60 надобно раздѣлить на 25 и 35, чтобъ эти числа относились между собою, какъ 5 и 7.

Рѣшеніе безъ пропорцій.

Такъ какъ $5 + 7 = 12$, то если 60 раздѣлимъ на 12 долей, и для одного числа возьмемъ 5 такихъ долей, а для другаго 7, то получимъ два числа, которыхъ сумма будетъ равна 60 и которыя относятся между собою, какъ 5 къ 7.

$$60 : 12 = 5; \qquad 5 \times 5 = 25; \qquad 5 \times 7 = 35.$$

Итакъ число 60 слѣдуетъ разложить на 25 и 35, и 25 такую же часть составятъ отъ 35, какую 5 отъ 7. Дѣйствительно $^{25}/_{35} = ^{5}/_{7}$.

Изъ трехъ купцовъ первый положилъ для торга 150 руб., второй 250 рублей и третій 350 рублей. По прошествіи нѣкотораго времени они получили прибыли на свой складочный капиталъ 200 руб. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ долженъ получить изъ этой прибыли?

Рѣшеніе. Очевидно, что прибыль должна быть раздѣлена пропорціонально вкладамъ: чѣмъ больше кто положилъ въ торгъ, тѣмъ

болѣе и должень получить изъ общей прибыли. Пусть первый получитъ прибыли x, другой y, а третій z рублей. Сумма всѣхъ вкладовъ равна 750 руб; поэтому составятся слѣдующія пропорціи:

$$750 : 150 = 200 : x$$
$$750 : 250 = 200 : y$$
$$750 : 350 = 200 : z$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{150 \times 200}{750} = 40 \text{ руб.} \\ y &= \frac{250 \times 200}{750} = 66^2/_3 \text{ »} \\ z &= \frac{350 \times 200}{750} = 93^1/_3 \text{ »} \\ &\overline{\qquad\quad 200 \text{ руб.}} \end{aligned}\right\} \text{Повѣрка.}$$

Рѣшеніе безъ пропорцій.

Если на 750 рублей, т. е. на весь вкладъ, получено 200 руб. прибыли, то на каждый рубль приходится въ 750 разъ менѣе или $^{200}/_{750}$ руб. или $^4/_{15}$ рубля прибыли. Узнавъ прибыль съ одного рубля, нетрудно узнать, сколько получится прибыли съ 150, 250 и 350 рублей.

Слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} &\text{1-й купецъ получилъ } 150 \times {}^4/_{15} = 40 \text{ руб.} \\ &\text{2-й} \quad » \quad » \quad 250 \times {}^4/_{15} = 66^2/_3 \text{ »} \\ &\text{3-й} \quad » \quad » \quad 350 \times {}^4/_{15} = 93^1/_3 \text{ »} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{\qquad 200 \text{ руб.}} \end{aligned}\right\} \text{Повѣрка.}$$

Вотъ еще нѣсколько задачъ.

1. *Одинъ купецъ положилъ въ общій торгъ 75 рублей на 3 мѣсяца, другой 25 рублей на 5 мѣсяцевъ, третій 15 рублей на 10 мѣсяцевъ; они получили прибыли 80 рублей. Спрашивается: какъ должно раздѣлить между ними эту прибыль?*

Приведемъ всѣ вклады къ одному отношенію, именно къ 1 мѣсяцу. Для этого соображаемъ такъ: чтобы вкладъ, обращающійся въ торговлѣ только одинъ мѣсяцъ, могъ принести ту же самую прибыль, какую приносятъ 75 рублей, положенные на 3 мѣсяца, необходимо чтобъ этотъ вкладъ былъ втрое болѣе. Такимъ образомъ сумма въ 225 рублей, положенная на одинъ мѣсяцъ, равняется суммѣ въ 75 рублей, положенной на 3 мѣсяца. Точно также 5×25

руб. или 125 руб., положенные на 1 мѣсяцъ, равняются 25 руб., положеннымъ на 5 мѣсяцевъ, и наконецъ 10×15 р. или 150 р., положенные тоже на 1 мѣсяцъ, все равно, что 15 руб., обращающіеся въ торговлѣ 10 мѣсяцевъ. Поэтому сумма: $225 + 125 + 150$, или 500 рублей, обращающаяся только 1 мѣсяцъ, принесетъ ту же общую прибыль 80 рублей. Но когда на 500 рублей получается 80 руб., то на каждый рубль причитается $^{80}/_{500}$ руб. или $^{4}/_{25}$ р.

Итакъ первый купецъ получитъ $\frac{225 \times 4}{25} = 36$ руб.

второй » » $\frac{125 \times 4}{25} = 20$ »

третій » » $\frac{150 \times 4}{25} = 24$ »

Повѣрка: 80 руб.

2) Нѣкто начинаетъ торговать, имѣя капиталу 25.000 *р. По прошествіи* 5 *мѣсяцевъ, желая распространить свое предпріятіе, онъ приглашаетъ къ себѣ товарища, который даетъ своего капитала* 40.000 *р.; по прошествіи же еще* 6 *мѣсяцевъ, другой товарищъ вноситъ для того же предпріятія* 60.000 *р. Послѣ двухъ лѣтъ это предпріятіе принесло барыша* 80.000 *р. Между ними было условлено, что тотъ, кто займется дѣлами этого предпріятія, получитъ въ пользу свою* 5 *р. съ каждыхъ* 100 *р. прибыли. Какъ слѣдуетъ раздѣлить полученный ими барышъ?*

По условію задачи, кто беретъ на себя всѣ труды по общему торговому предпріятію, получаетъ съ каждыхъ 100 рублей прибыли по 5 руб. Это показываетъ, что онъ съ рубля получаетъ $^{5}/_{100}$ руб. или $^{1}/_{20}$ руб.; значитъ съ 80.000 руб. долженъ получить 4.000 руб. Итакъ остается 76.000 рублей для раздѣла между тремя товарищами, соразмѣрно внесеннымъ ими вкладамъ, а также времени, въ которое обращался въ торговлѣ капиталъ каждаго.

Вкладъ перваго обращался въ торговлѣ 24 мѣсяца.

» втораго » » » 19 »

» третьяго » » » 13 »

Но 25.000 руб., положенные на 24 мѣсяца, равняются капиталу 25.000×24 или 600,000 руб., положенному на 1 мѣсяцъ. Подобнымъ образомъ 40.000 руб. втораго изъ товарищей, положенные на 19 мѣсяцевъ, равняются 40.000×19 или 760.000 руб., положеннымъ на 1 мѣсяцъ; наконецъ 60.000 руб. третьяго если бы были положены на 1 мѣсяцъ, то составили бы капиталъ въ 780.000 руб.

Отсюда видно, что барышь въ 76.000 рублей надобно раздѣлить на три неравныя части, сообразно суммамъ: 600.000, 760.000 и 780.000, обращающимся въ торговлѣ одинаковое время и которыя вмѣстѣ составляютъ 2.140.000 руб.

$$\text{Часть 1-го} = \frac{76.000 \times 60}{214} = 21.308 \text{ р. } 41 \text{ коп.}$$

$$\text{» 2-го} = \frac{76.000 \times 76}{214} = 26.990 \text{ » } 65 \text{ »}$$

$$\text{» 3-го} = \frac{76.000 \times 78}{214} = 27.700 \text{ » } 94 \text{ »}$$

Повѣрка: 76.000 р.
+4.000 »
80.000 р.

3) *Нѣкто по смерти своей оставилъ четырехъ наслѣдниковъ, для которыхъ сдѣлалъ слѣдующее завѣщаніе: первый изъ нихъ долженъ получить изъ всего имущества* $^1/_6$, *второй* $^2/_5$, *третій* $^4/_9$, *а четвертый* $^1/_3$. *Спрашивается: сколько каждый долженъ получить изъ наслѣдства, состоявшаго изъ 40.000 рублей?*

Еслибъ сумма четырехъ данныхъ долей равнялась 1, то завѣщаніе было бы исполнено такъ: надлежало бы только опредѣлить сперва 6-ю часть отъ 40.000 руб., потомъ $^2/_5$ и т. д.; но, по приведеніи дробей $^1/_6$, $^2/_5$, $^4/_9$, $^1/_3$ къ одинаковому знаменателю, находимъ, что сумма ихъ равняется $1^{31}/_{90}$, т. е. выводъ бо̀льшій единицы. Поэтому очевидно, что недостало бъ наслѣдства, еслибъ каждому выдать то, что по завѣщанію опредѣлено. Однакожъ наслѣдство должно быть все-таки раздѣлено соразмѣрно числамъ: $^1/_6$, $^2/_5$, $^4/_9$, $^1/_3$ или все то же, что числамъ 15, 36, 40, 30, если дроби приведемъ къ одинаковому знаменателю и послѣдняго отбросимъ. Но сумма этихъ чиселъ = 121. Слѣдовательно 40.000 р. надобно раздѣлить на 4 неравныя части, соразмѣрно числамъ: 15, 36, 40, 30.

Выводы:

$$\text{1-я часть} = \frac{15 \times 40000}{121} = 4958 \text{ руб. } 68 \text{ коп.}$$

$$\text{2-я »} = \frac{36 \times 40000}{121} = 11900 \text{ » } 82 \text{ »}$$

$$\text{3-я »} = \frac{40 \times 40000}{121} = 13223 \text{ » } 14 \text{ »}$$

$$\text{4-я »} = \frac{30 \times 40000}{121} = 9917 \text{ » } 36 \text{ »}$$

Повѣрка: 40000 руб.

Къ задачамъ правила товарищества относятъ также и расчеты, дѣлаемые конкурсомъ, учреждаемымъ надъ несостоятельнымъ должникомъ, для удовлетворенія кредиторовъ, когда имущество должника оказывается менѣе всей суммы его долговъ. Положимъ, что нѣкто былъ долженъ разнымъ лицамъ 142530 рублей, а полученнаго отъ акціонерной продажи его имущества оказалось всего на 34581 р. 28 коп. Очевидно, что кредиторы не могутъ получить рубль за рубль, а во столько разъ менѣе, во сколько 34581 р. 28 к. менѣе 142530 рублей, т. е.

$$x = \frac{34581,28 \times 100}{142530,00} = \frac{3458128}{14253000} = 0,2426 \text{ руб.}$$

Или, вмѣсто каждаго рубля, кредиторы получаютъ только 24 коп.

Для удобства расчетовъ, особенно если кредиторовъ много, можно предварительно составить такую табличку;

За	1	рубль	приходится	0,2426	руб.
»	2	»	»	0,4852	»
»	3	»	»	0,7278	»
»	4	»	»	0,9704	»
»	5	»	»	1,2130	»
»	6	»	»	1,4556	»
»	7	»	»	1,6982	»
»	8	»	»	1,9408	»
»	9	»	»	2,1834	»

Положимъ, что одного изъ кредиторовъ, который предъявилъ долгъ въ 1385 рублей, надобно удовлетворить по этому расчету.

Вмѣсто	1000	руб.	ему	слѣдуетъ	получить	242	р.	60	коп.
»	300	»	»	»	»	72	»	78	»
»	80	»	»	»	»	19	»	40	»
»	5	»	»	»	»	1	»	21	»

Поэтому, вмѣсто 1385 руб., онъ получитъ 335 р. 99 коп.

Такіе же облегчительные пріемы въ выкладкахъ употребляются и при ликвидаціи акціонерныхъ обществъ, когда они прекращаютъ свои дѣйствія.

Примѣчаніе. Изъ рѣшеній предложенныхъ задачъ, относящихся къ правилу товарищества, легко усмотрѣть, что вся трудность состоитъ здѣсь не въ какихъ-либо особыхъ правилахъ, а въ надлежащихъ соображеніяхъ условій задачи.

§ 47.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) 4 человѣка купили на 96 рублей 10 берковцевъ 7 пудовъ 16 фунтовъ муки; первый далъ на покупку муки 26 руб., второй 28 р.,

третій 20 руб., а четвертый остальные. По сколько муки получитъ каждый?

2) 6 поселянъ засѣяли вмѣстѣ участокъ земли 8 четвертями 7 четвериками ржи. 1-й употребилъ на этотъ посѣвъ 1 четверть 1 четверикъ ржи, другой — 7 четвериковъ, третій 1 четверть 3 четверика, четвертый 1 четверть 2 четверика, пятый — 6 четвериковъ и шестой — остальное. На другой годъ они получили урожаю 33 четверти 5 четвериковъ. Какъ слѣдуетъ раздѣлить между ними полученную отъ урожая рожь?

3) Трое: А, Б и В положили въ общій торгъ 2800 рублей, и по прошествіи двухъ лѣтъ А получилъ барыша 400 рублей, Б — 380 р. и В — 150 рублей. Сколько положилъ каждый въ торгъ?

4) Четыре компаніона, по истеченіи 6 лѣтъ, получили барыша отъ своего торга, на капиталъ 9460 руб., 4348 рублей, и когда раздѣлили этотъ барышъ, то первый получилъ изъ него $^1/_3$; другой $^1/_6$, третій $^1/_{12}$, а четвертый $^5/_{12}$. Нужно знать, сколько каждый положилъ въ торгъ.

5) Подрядчикъ подрядился срубить домъ въ одинъ мѣсяцъ, и приставилъ для того 14 плотниковъ. По прошествіи 17 дней, боясь не окончить къ сроку этой работы, онъ приставилъ къ ней еще 8 плотниковъ, которые и работали вмѣстѣ съ первыми до конца мѣсяца. Получивъ за эту работу 500 руб. $34^2/_7$ коп., онъ взялъ себѣ 10 процентовъ этой суммы (десятую часть), а остальное раздѣлилъ плотникамъ соразмѣрно числу дней, которые каждый работалъ. Спрашивается: сколько получила первая и сколько вторая партія плотниковъ?

6) На три партіи работниковъ, изъ которой въ одной было 50 человѣкъ, въ другой 84 человѣка и въ третьей 35 человѣкъ, должно было выдать заработанныхъ денегъ на каждаго человѣка первой партіи по 60 рублей, другой партіи — по 55 руб. и третьей партіи по 30 рублей; но выдано на всѣхъ только 5845 рублей. Нужно знать: во-первыхъ, по сколько выдано на каждую партію, во-вторыхъ, на каждаго человѣка каждой партіи.

7) А имѣлъ собственности на кораблѣ $^8/_{15}$ всего груза, Б — $^4/_{15}$, В — $^2/_{10}$ груза; корабельщикъ привезъ чистаго барыша 12 тысячъ руб. Сколько слѣдуетъ каждому получить изъ этого барыша?

8) Шести командамъ дано въ награжденіе 800 р. Въ первой командѣ было 24 человѣка, во второй 36, въ третьеи 45, въ четвертой и пятой по 50 и въ шестой 55 человѣкъ. Узнать, по сколько придется изъ награжденія каждой командѣ.

9) 2100 руб. 25 коп. раздѣлить троимъ А, Б и В такъ, что когда А будетъ дано 15 руб., тогда бы Б получилъ 12, а В — 8 руб. Сыскать долю каждаго.

10) Раздѣлить число 13959 на три неравныя части, которыя находились бы между собою въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся дроби: $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$.

11) Двое мастеровыхъ получили за нѣкоторую работу 200 руб.; одинъ изъ нихъ употребилъ на нее 17 дней, работая ежедневно по 10 часовъ, а другой 11 дней, работая ежедневно по 8 часовъ. Сколько каждому слѣдуетъ взять изъ полученной суммы?

12) Помѣщикъ на вопросъ: сколько находится въ его усадьбѣ рабочихъ? — отвѣчалъ: $^2/_3$ людей на сѣнокосѣ, $^1/_7$ при пашнѣ, $^1/_9$ при постройкѣ и 5 остальныхъ при домашнемъ хозяйствѣ. Спрашивается число людей его усадьбы.

13) Нѣкто при кончинѣ своей отказалъ четверымъ своимъ родственникамъ 36.000 рублей съ условіемъ, чтобы второй изъ нихъ взялъ на свою часть вдвое болѣе перваго, третій втрое болѣе втораго, а четвертый въ $1^1/_2$ раза болѣе третьяго. Сыскать долю каждаго.

14) Три купца А, Б и В согласились вмѣстѣ торговать. А положилъ въ общій торгъ 200 рублей, Б — 320 рублей, а В неизвѣстно сколько; всего же барыша получили они 275 руб., изъ которыхъ на долю В пришлось 75 руб. Спрашивается: сколько получили барыша А и Б и сколько В положилъ въ общій торгъ?

15) Нѣкто, оставивъ послѣ своей смерти капиталъ въ 6525,5 руб., завѣщалъ, чтобы жена получила изъ этого капитала въ $1^1/_2$ раза болѣе сына, а сынъ вдвое болѣе дочери. Сколько получилъ каждый?

16) Трое положили по равной части капитала въ торгъ, только часть перваго оставалась въ оборотѣ $^5/_6$ года, часть втораго $^3/_4$ года, а часть третьяго $^7/_{12}$ года. По сколько каждому приходится получить изъ общей прибыли 735 руб., 37,5 копѣйки?

17) Раздѣлить число 324 на три части такъ, чтобы $^1/_3$ перваго числа равнялась пятерному третьему, и $^1/_4$ втораго также пятерному третьему.

18) 6 учениковъ сложились вмѣстѣ, чтобы взять лотерейный билетъ. Первый далъ $1^1/_2$ руб., второй $2^1/_3$ руб., третій $1^3/_4$ руб., четвертый $2^1/_8$ руб., пятый $1^2/_3$ руб. и шестой $^5/_6$ руб. Они выиграли 360 руб. По сколько причитается получить каждому?

19) Купецъ положилъ въ торгъ 50.000 руб.; по прошествіи 6 мѣсяцевъ товарищъ его взялъ на себя изъ этой суммы 15.000 руб., а по прошествіи еще двухъ мѣсяцевъ купецъ уступилъ другому своему товарищу 20.000 рублей изъ той части, которая оставалась за нимъ изъ 50.000 руб. Наконецъ, спустя еще 6 мѣсяцевъ, на всю сумму, положенную въ торгъ, получено прибыли 12.000 руб. Спрашивается: сколько каждый изъ троихъ долженъ получить изъ этой прибыли?

20) Трое раздѣлили между собой 1700 руб. такъ, что часть перваго относится къ части втораго, какъ 5 къ 9, а часть втораго относится къ части третьяго, какъ 11 къ 8. Опредѣлить часть каждаго.

21) Трое окончили нѣкоторую работу въ 91 день, работая одинъ послѣ другаго. Первый получалъ за день по 80 коп., другой по

1 р. 20 коп., а третій по 1 р. 60 коп. По окончаніи работы всѣ трое получили по равному количеству денегъ. Надобно знать, сколько дней работалъ каждый?

22) Для одного общаго предпріятія одинъ изъ трехъ участниковъ положилъ 2.100 рублей, изъ которыхъ чрезъ 5 мѣсяцевъ взялъ обратно 840 рублей; другой положилъ 2500 руб., а чрезъ 8 мѣсяцевъ взялъ изъ нихъ 1300 руб.; третій положилъ 900 рублей, и черезъ два мѣсяца прибавилъ къ нимъ еще 1000 руб. По окончаніи года оказалось всей прибыли 1500 руб. Спрашивается: сколько каждый изъ этой прибыли получить долженъ?

23) Двое мастеровыхъ подрядились на одну работу. Еслибъ первый работалъ одинъ, онъ произвелъ бы эту работу въ 20 часовъ, а еслибъ второй работалъ одинъ, онъ окончилъ бы ее въ 16 часовъ. Во сколько часовъ они окончатъ оба вмѣстѣ?

24) Четверо наслѣдниковъ раздѣлили между собою имѣніе: первому досталось $^1/_5$ всего имѣнія, другому $^1/_7$, третьему $^3/_{11}$, а четвертому остальные 1450 руб. Но наслѣдники должны были также принять на себя и долгъ, состоявшій въ 580 рубляхъ. Спрашивается: 1) сколько кому досталось за уплатою части долга, соразмѣрной полученному каждымъ наслѣдству, и 2) сколько было всего имѣнія?

25) Въ бассейнѣ устроены три трубы: двумя его наполняютъ водою, а изъ третьей выпускаютъ воду. Первая труба наполняетъ бассейнъ водою въ 1 часъ 12 минутъ, а другая въ 36 минутъ; если же открыть третью трубу, то вся вода вытечетъ въ 24 минуты. Въ какое время наполнится бассейнъ водою, когда всѣ три трубы будутъ открыты?

26) Трое потерпѣли убытку 4000 рублей. Убытокъ перваго равняется $^3/_5$ всей суммы, убытокъ втораго $^2/_7$. Сколько понесетъ убытку каждый изъ троихъ?

27) Коммиссіонеру приказано было принять сукна 5100 аршинъ, шириною въ 1 аршинъ 14 вершковъ; но онъ, по неимѣнію такой ширины сукна у подрядчика, принялъ 1500 аршинъ, шириною въ 2 аршина, 840 арш. шириною въ 1 арш. 15 верш. и еще 772 арш., шириною въ 1 аршинъ $13^1/_2$ верш., а послѣднее осталось принять ему шириною въ 1 аршинъ $12^1/_2$ вершковъ. Спрашивается: сколько ему должно было принять этого послѣдняго сукна, чтобъ все принятое разныхъ широтъ сукно составляло длину 5100 аршинъ указанной ширины?

§ 48.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ТАКЪ-НАЗЫВАЕМОМУ ПРАВИЛУ СМѢШЕНІЯ.

Задачи этого рода бываютъ двухъ видовъ: *1) когда по нѣсколькимъ разнымъ сортамъ какого-либо вещества, причемъ извѣстны количество и цѣна каждаго сорта, требуется опредѣлить средній сортъ, получаемый отъ смѣшенія всѣхъ сортовъ; 2) когда требуется опре-*

дѣлить количество каждаго сорта смѣси по данной цѣнѣ или достоинству, какъ каждаго сорта въ особенности, такъ и всей смѣси вообще.

Имѣется двухъ сортовъ порохъ: 100 фунтовъ перваго сорта, котораго каждый фунтъ стóитъ 1 рубль 20 коп., и 35 фунтовъ втораго сорта, по 85 коп. фунтъ. Если весь этотъ порохъ смѣшать, то во что обойдется фунтъ смѣшаннаго пороха?

Опредѣлимъ сперва количество и цѣну всего пороха, который требуется вмѣстѣ смѣшать.

100 ф. по 120 коп. ф.		120 руб.
35 › › 85 › ›		29 › 75 к.
135 фунтовъ		149 руб. 75 к.

Если 135 ф. стоютъ 149 р. 75 к., то 1 ф. въ 135 разъ менѣе; а именно

$$x = \frac{149,75}{135} = \frac{2995}{2700} = 1 \text{ руб. } 10\frac{25}{27} \text{ коп.}$$

Требуется смѣшать трехъ сортовъ серебро: 23 фунта 0,825 пробы, 14 фунтовъ 0,910 пробы и 19 ф. 0,845 пробы. Спрашивается проба смѣси изъ этихъ трехъ сортовъ.

Примѣчаніе. Мастера золотыхъ и серебряныхъ дѣлъ всегда мѣшаютъ золото и серебро съ другими металлами, какъ-то: мѣдью, цинкомъ и проч., отчасти чтобы придать болѣе тягучести благороднымъ металламъ. Смѣси такого рода называются *лигатурою*. Очевидно, что, по мѣрѣ прибавленія мѣди и проч. къ золоту и серебру, теряется достоинство и самой вещи, сплавленной изъ смѣси, а поэтому нужно всегда знать отношеніе между мѣдью и благороднымъ металломъ, вошедшими въ смѣсь. Число, показывающее сколько золотниковъ чистаго серебра или золота вошло въ 1 фунтъ лигатурнаго, называется *пробою*. Когда говорятъ, что такая-то золотая или серебряная вещь *такой-то пробы*, то подъ этимъ разумѣютъ, что въ извѣстномъ вѣсѣ, именно въ 1 фунтѣ, столько-то золотниковъ чистаго золота или серебра. Такъ, напримѣръ, серебро 84-й пробы показываетъ, что въ 1 фунтѣ или 96 золотникахъ смѣси (лигатуры) находится 84 золотника чистаго серебра, а остальные 12 золотниковъ составляютъ мѣдь и проч.

Изъ условія задачи видно, что чистаго серебра содержится

въ 23 ф.	1-го	сорта	23 × 0,825	или	18,875 ф.	чист.	серебра.
› 14 ›	2-го	›	14 × 0,910	›	12,740 ›	›	›
› 19 ›	3-го	›	19 × 0,845	›	16,055 ›	›	›
Въ 56 фунт.					47,770 ф.	чист.	серебра.

Итакъ проба смѣшаннаго серебра изобразится чрезъ $\frac{47,770}{56}$, что равно 0,853; т. е. слитокъ будетъ 85-й пробы.

Припоминая то, что было сказано о нахожденіи *средняго числа* (§ 47-й I книги), мы легко можемъ заключить, что задачи этого вида въ сущности тѣ же самыя, что и задачи, въ которыхъ отъискивается среднее число. Вся разница въ содержаніи, которое можетъ быть очень разнообразно. Напримѣръ этимъ же пріемомъ повѣряются измѣренія высотъ (горы, башни), измѣренія разстояній между двумя какими-нибудь опредѣленными пунктами и проч.

Извѣстно, что не смотря на всю точность инструментовъ, употребляемыхъ для измѣренія, напримѣръ высотъ, всякое новое измѣреніе даетъ какую-либо разность предъ измѣреніемъ прежде сдѣланнымъ. Чтобы въ такомъ случаѣ получить выводъ ближайшій къ точному, дѣлаютъ нѣсколько измѣреній одного и того же разстоянія, складываютъ ихъ между собою и сумму дѣлятъ на число измѣреній. Допустимъ, что было сдѣлано пять измѣреній одной и той же высоты горы, изъ которыхъ два дали въ результатѣ по 528,9 фута, другія два по 527,4 ф., а одно 529,1 ф.

Отсюда получаемъ

2 измѣренія = 2 × 528,9 = 1057,8 ф.
2 » = 2 × 527,4 = 1064,8 »
1 измѣреніе. . . . . . = 529,1 »

Сумма 5 измѣреній = 2641,7 ф.
2641,7 : 5 = 528,34 футамъ.

Это послѣднее число ближе подходитъ къ настоящей величинѣ измѣряемой высоты.

Задача втораго вида.

Виноторговецъ имѣетъ вино двухъ сортовъ: ведро вина перваго сорта стоитъ 36 руб., а втораго 20 руб. Онъ хочетъ смѣшать эти сорта въ такомъ количествѣ, чтобы получить 50 ведръ и продавать каждое безъ барыша и убытка по 30 рублей. Спрашивается: сколько онъ долженъ взять ведръ каждаго сорта чтобы получить искомую смѣсь?

Рѣшеніе прямо зависитъ отъ одныхъ соображеній, а не отъ какихъ-либо особыхъ правилъ. Изъ условій задачи видно, что на каждое ведро перваго сорта, входящаго въ смѣсь, получается убытку 6 рублей, а на каждое ведро втораго сорта, напротивъ, прибыли 10

рублей. Поэтому перваго сорта вина должно взять болѣе въ смѣшеніе, нежели втораго, потому что убытокъ съ перваго менѣе прибыли со втораго, виноторговецъ же не хочетъ получить отъ продажи смѣшаннаго вида ни барыша, ни убытку. Такъ какъ на каждое ведро перваго сорта 6 рублей убытку, а на каждое ведро втораго 10 рублей прибыли, то перваго сорта должно взять во столько разъ болѣе втораго, во сколько 10 болѣе 6; т. е. $^5/_3$ раза.

Слѣдовательно, если втораго сорта возьмется одно ведро, то перваго должно взять $^5/_3$ ведра. Отсюда понятно, что задача приводится къ раздѣленію числа 50 на двѣ неравныя части, соразмѣрно числамъ $^5/_3$ и 1, или $^5/_3$ и $^3/_3$, или 5 и 3.

Выкладка.

$50 : 8 = 6^1/_4$

$6^1/_4 \times 5 = 31^1/_4$ ведрамъ перваго сорта.

$6^1/_4 \times 3 = 18^3/_4$ » втораго сорта.

Всего 50 ведръ.

Повѣрка.

$31^1/_4$ ведр.,	по 36 руб.	каждое		1125 руб.
$18^3/_4$ »	» 20 »	»		375 »
50 ведръ.				1500 руб.

Отсюда 1 ведро стоитъ 30 рублей.

§ 49.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Требуется узнать, какой пробы будетъ слитокъ серебра, въ который вошло 9 фунтовъ серебра 72-й пробы, 15 фунтовъ 78-й пробы и 12 фунтовъ 84-й пробы.

2) Смѣшана мука четырехъ сортовъ: 1-го сорта 20 четвериковъ, по 1 руб. 10 коп. каждый, втораго 16 четвериковъ, по 90 коп., 3-го 13 четвериковъ, по 84 коп. и 4-го 9 четвериковъ, по 70 коп. каждый. Почемъ слѣдуетъ продавать четверикъ смѣшанной муки, чтобы на каждый имѣть прибыли 20 копѣекъ?

3) Виноторговецъ смѣшавъ вино двухъ сортовъ: 600 бутылокъ одного сорта, по $68^4/_7$ коп. каждая, и 400 бутылокъ другаго сорта, по $88^4/_7$ коп. каждая, при продажѣ потерпѣлъ убытка на все вино 50 рублей. По сколько онъ продавалъ бутылку смѣшаннаго вина?

4) Изъ одной пушки, чтобъ узнать ея прочность, было сдѣлано 100 пробныхъ выстрѣловъ: при 25 выстрѣлахъ ядро перелетало

разстояніе въ 720 саженъ, при 23 выстрѣлахъ перелетало 810 саженъ, при 47 выстрѣлахъ — 760 саженъ, а при 5 выстрѣлахъ—796 саженъ. Узнать разстояніе средняго выстрѣла.

5) Купецъ купилъ 36 фунтовъ чаю, изъ которыхъ 22 фунта цѣною по 3 руб. $28^{4}/_{7}$ коп. каждый, а 14 фунт. по 2 руб. $92^{6}/_{7}$ к. каждый. Смѣшавъ этотъ чай вмѣстѣ, онъ хочетъ знать во что обощелся ему фунтъ смѣшаннаго чаю. Опредѣлить это.

6) Сколько котораго изъ двухъ сортовъ серебра должно растопить вмѣстѣ, чтобы фунтъ растопленнаго серебра можно было продавать по 90 рублей, когда фунтъ одного сорта стоитъ 82 рубля, а другаго 96 рублей?

7) Если къ 450 бутылкамъ уксуса, цѣною по 10 коп. бутылка, прилить 35 бутылокъ воды, то во что обойдется бутылка смѣси?

8) Спрашивается: сколько должно прибавить мѣди на 25 фунтовъ серебра 85-й пробы, чтобы сдѣлать смѣсь 72-й пробы?

9) Сколько должно прибавить чистаго серебра или выжиги къ 216 золотникамъ 69-й пробы, чтобы сдѣлать серебро 73-й пробы?

10) Нужно смѣшать $3^{5}/_{8}$ фунта трехъ сортовъ вещества, котораго лотъ перваго сорта стоитъ 90 коп., втораго сорта 72 коп., и третьяго 68 копѣекъ. Сколько надо взять на $3^{5}/_{8}$ ф. каждаго изъ этихъ сортовъ, чтобы лотъ смѣшаннаго вещества стоилъ 75 коп.?

§ 50.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРАВИЛУ СОЕДИНЕНІЯ ИЛИ ЦѢПНОМУ (ПЕРЕВОДНОМУ).

Въ задачахъ, которыя сюда относятся, требуется *переводить мѣры одного государства на мѣры другаго.* Такъ какъ для рѣшенія этого рода задачъ часто бываетъ надобность вводить въ исчисленіе отношенія между мѣрами и другихъ государствъ, которыя соединяются между собою и, наконецъ, сводятся къ искомому отношенію, образуя непрерывный рядъ отношеній (какъ бы цѣпь), то и назвали такія рѣшенія *цѣпнымъ правиломъ.* Переводъ монетъ одного государства на монеты другаго бываетъ чрезвычайно разнообразенъ и обусловливается многими обстоятельствами: разнообразіемъ самыхъ монетъ, монетными пари [1]), состояніемъ курса, т. е. повышеніемъ или пониженіемъ его, зависящими отъ многихъ причинъ, прибылью лица (банкира), который занимается переводомъ денегъ, за ком-

---

[1]) Отношеніе между количествомъ монеты одного государства и количествомъ подобной же монеты другаго государства, когда онѣ имѣютъ поравну чистаго золота или серебра, называется *монетнымъ пари.*

миссію и проч. и проч., и потому нѣтъ возможности въ популярной ариѳметикѣ ознакомить учащихся съ этимъ дѣломъ на столько, чтобъ они могли себѣ его усвоить надлежащимъ образомъ. Собственно это составляетъ предметъ особаго знанія, выходящаго изъ круга ариѳметическихъ дѣйствій, и здѣсь мы можемъ дать о немъ только общее понятіе. Предложимъ нѣсколько примѣровъ.

1) *Если 50 ливровъ парижскихъ равняются 51 ливру гамбургскому, а 25 ливровъ гамбургскихъ составляютъ 24 ливра франкфуртскихъ, то требуется узнать, какой части франкфуртскаго ливра равняется 1 парижскій ливръ?*

Если 25 гамб. ливровъ равняются 24 франкфуртскимъ, то 1 гамб. = $^{24}/_{25}$ франкф.; поэтому 50 парижскихъ ливровъ или 51 гамбург. $= \frac{51 \times 25}{25}$ франкф., а 1 париж. ливръ $= \frac{51.24}{50.25} = \frac{612}{625}$ франкфуртскаго.

Примѣчаніе. Но кто бы подумалъ, что за 1 парижскій ливръ онъ дѣйствительно получитъ $^{612}/_{625}$ франкф., зная только номинальное отношеніе между этими монетами, тотъ крайне бы ошибся, ибо, какъ мы замѣтили выше, цѣнность монетъ зависитъ отъ многихъ побочныхъ обстоятельствъ. Отсюда видно, что всѣ такого рода вычисленія имѣютъ только относительную важность.

2) *Выразить французскій метръ посредствомъ русскаго аршина; причемъ извѣстно, что 15 футовъ парижскихъ равняются 16 англійскимъ; а метръ = 3,078440 париж. фута; русская же сажень = 7 англійскимъ футамъ.*

1 париж. ф. = $^{16}/_{15}$ англ. ф.
1 англ. ф. = $^{3}/_{7}$ арш. русск.

Слѣдовательно

$$1 \text{ метръ} = \frac{3,078440 \times 16}{15} \text{ англ. фут.,}$$

$$\text{или } 1 \text{ метръ} = \frac{3,678440 \times 16 \times 3}{15 \times 7} \text{ русск. арш.;}$$

т. е. 1 метръ = 1,407 русск. арш.

Въ результатѣ получили произведеніе изъ трехъ дробныхъ выраженій ($3,078440 \times {}^{16}/_{15} \times {}^{3}/_{7}$).

3) *48 франкамъ соотвѣтствуютъ 52 англійскимъ шиллингамъ, 15 англ. шил. = 6 нѣмецк. флоринамъ, 50 нѣмецк. флор. = 7 гамб.*

дукатамъ, 14 гамб. дукатовъ = 40 русск. рублямъ. Требуется опредѣлить, сколькимъ русскимъ рублямъ соотвѣтствуютъ 2500 франковъ.

1 франкъ = $^{52}/_{48}$ англ. шил.
1 англ. шил. = $^{6}/_{15}$ нѣм. фл.
1 нѣмец. фл. = $^{7}/_{50}$ гамб. дукат.
1 гамб. дук. = $^{40}/_{14}$ русск. руб.

Поэтому

$$1 \text{ франкъ} = {}^{52}/_{48} \times {}^{6}/_{15} \times {}^{7}/_{50} \times {}^{40}/_{14} \text{ р.}$$

$$2500 \text{ фр} = \frac{2500.52.6.7.40}{48.15.50.14} = 433 \text{ р. } 33 \text{ коп.}$$

Примѣчаніе. Очевидно, что такъ-называемое цѣпное правило есть не что иное, какъ умноженіе дробей.

§ 51.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ИСЧИСЛЕНІЮ ПРОЦЕНТОВЪ.

Капиталомъ, по преимуществу, называютъ всякую сумму денегъ, отдаваемую кому-либо заимообразно для приращенія процентами. *Процентъ* (pro cento — со ста) есть прибыль, получаемая съ каждыхъ ста рублей капитала, отданнаго на опредѣленный срокъ времени. Обыкновенно проценты расчитываются на годъ; такъ напримѣръ: 1, 2, 3. 4. 5, 6 и проч. процентовъ значитъ 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч. рублей прибыли, получаемой въ теченіе года съ каждыхъ 100 рублей капитала. Проценты, для краткости, изображаются знакомъ %. Лицо, ссужающее деньгами подъ проценты, называется *кредиторомъ*, а лицо, занимающее деньги — *заемщикомъ* или *должникомъ*. Учрежденіе, правительственное или частное, которое выдаетъ въ займы деньги на опредѣленные сроки, подъ обезпеченіе всякаго рода имущества, вообще называется *банкомъ*.

Величина прибыли или *барыша*, отданнаго подъ проценты или *въ ростъ* капитала зависитъ, во-первыхъ, отъ величины самаго капитала, во-вторыхъ, отъ времени, въ которое этотъ капиталъ обращается въ процентахъ, и въ-третьихъ, отъ бо́льшаго или мѐньшаго риска обезпеченія займа. Большею же частію это зависитъ отъ взаимныхъ условій кредитора и должника.

Проценты бываютъ *простые* и *сложные*. Если по прошествіи перваго, втораго года и т. д., пока капиталъ не уплаченъ, сумма ежегодныхъ процентовъ остается неизмѣнною, выплачивается особо, а

не прилагается къ капиталу, который поэтому также остается неизмѣннымъ, то проценты называются *простыми*; если же ежегодно проценты причитываются къ капиталу, такъ что по прошествіи втораго года проценты исчисляются уже не на одинъ занятый капиталъ, а на сумму капитала и процентовъ предшествующаго года, то такіе проценты называются сложными. Такъ напримѣръ: если 100 рублей, отданные въ заемъ по 4%, обращаются по прошествіи 1-го года въ 104 руб., по прошествіи втораго года въ 108 рублей, и т. д., гдѣ капиталъ (100 р.) остается неизмѣннымъ, а проценты на 1 годъ составляютъ 4 руб., на другой еще 4, на третій еще 4 и т. д., то это значитъ, что 100 руб. отданы въ заемъ подъ простые проценты. Сложные же проценты будутъ тогда, какъ по прошествіи втораго года 4 процента будутъ исчисляться уже не на 100 р., а на 104 рубля. Ясно, что по прошествіи этого втораго года процентовъ выйдетъ не 4 р., а болѣе, потому что и съ 4 руб. также надобно причислить проценты.

Простые проценты возрастаютъ пропорціонально капиталу и времени его обращенія, между тѣмъ какъ сложные проценты возрастаютъ гораздо скорѣе. Такъ, напримѣръ: если капиталъ въ 100 рублей отдать въ займы подъ простые проценты, по 6 со ста, то только чрезъ 16 лѣтъ и 8 мѣсяцевъ этотъ капиталъ удвоится, тогда какъ при сложныхъ процетахъ тотъ же капиталъ удвоится по прошествіи 12 лѣтъ.

Примѣчаніе. Надобно замѣтить, что слово «процентъ», въ обширномъ значеніи слова, прилагается не только къ исчисленію денегъ, находящихся въ обращеніи, но и ко всѣмъ тѣмъ величинамъ, которыя въ одинаковыя времена могутъ получать одинаковое приращеніе (ходя даже приблизительно) или одинаковую убыль; напр. къ движенію народонаселенія, къ усушкѣ и утечкѣ вина и соли, къ возвышенію плодородія почвы и проч. Положимъ, что въ нѣкоторомъ городѣ въ 1866 году считалось жителей 10.000, въ 1867 году 10.200, въ 1868 г. слишкомъ 10.400 и т. д.; въ 1869 году тоже было приращенія до 200 человѣкъ. Отсюда можемъ заключить, что въ эти годы ежегодное приращеніе народонаселенія въ городѣ равнялось 2%, потому что 200 отъ 10000 составляютъ $^2/_{100}$.

а) *Простые проценты.*

1) *Сколько получится прибыли съ капитала 2400 рублей, отданнаго на годъ подъ проценты, по 5 на сто?*

Если съ каждыхъ 100 руб. получается по прошествіи года 5 рублей, то съ 2400 рублей должно получить болѣе 5 руб. во столько разъ, во сколько 2400 болѣе 100.

$$100 : 2400 = 5 : x$$

$$x = \frac{2400 \times 5}{100} = 24 \times 5 = 120 \text{ руб.}$$

Другое рѣшеніе. Если на 100 рублей получается 5 руб., то на каждый рубль будетъ въ 100 разъ менѣе, т. е. $^5/_{100}$ или $^1/_{20}$ рубля. Слѣдовательно на 2400 руб. получится прибыли

$$240 \times {}^1/_{20} = 120 \text{ рублей.}$$

2) *Какой капиталъ надобно отдать на проценты, по 4 со ста, чтобъ ежегодно получать 600 руб. процентовъ?*

$$4 : 500 = 100 : x$$

$$x = 60000 : 4 = 15.000 \text{ руб.}$$

Другое рѣшеніе. Такъ какъ 100 рублей болѣе 4 руб. въ 25 разъ, то и капиталъ долженъ быть въ 25 разъ болѣе 600 руб.

$$25 \times 600 \text{ руб.} = 15.000 \text{ руб.}$$

3) *Капиталъ въ 1275 рублей отданъ на 2 года 8 мѣсяцевъ, по 5%. Опредѣлить, сколько всего получится процентовъ за это время.*

2 года 8 мѣсяцевъ = 32 мѣсяцамъ.

Если со 100 руб. въ 12 мѣсяцевъ получается 5 руб. процентовъ, то съ тѣхъ же 100 руб. въ 32 мѣсяца должно получить пропорціонально болѣе; т. е.

$$12 \text{ мѣс.} : 32 \text{ м.} = 5 : x$$

$$x = \frac{5 \times 32}{12} = \frac{5 \times 8}{3} = 13^1/_3 \text{ рубл.}$$

Теперь другая пропорція:

$$100 : 1275 = 13^1/_3 : x$$

$$x = \frac{1275 \times 40}{100 \times 3} = \frac{3 \times 85 \times 5 \times 20 \times 2}{5 \times 20 \times 3} = 170 \text{ руб.}$$

Другое рѣшеніе. Если чрезъ 12 мѣсяцевъ каждый рубль капитала возрастаетъ на $^1/_{20}$ рубля, то въ 32 мѣсяца онъ долженъ возрасти въ $^{32}/_{12}$ раза, т. е. всего на $^2/_{15}$ рубля; а 1275 руб.

$$1275 \times {}^2/_{15} = 170 \text{ руб.}$$

Третье рѣшеніе.

Капиталъ 1275 руб. принесетъ процентовъ;

По прошествіи 1-го года	$1275 \times 0,05$ . . .	63 р. 75 к.
» » 2-го года	еще $1275 \times 0,05$ . . .	63 » 75 »
» » 8 мѣсяц.	$^{8}/_{12} \times 1275 \times 0,05$ . . .	42 » 50 »
По прошествіи 2 лѣтъ 8 мѣсяцевъ	. . .	170 руб.

4) *На каждую акцію, въ 250 рублей, одного акціонернаго общества выдано по прошествіи года дивиденду по 24 рубля, да въ запасной капиталъ отчислено съ каждой акціи по 3 р. Узнать, какой процентъ въ этомъ году получило общество отъ своего предпріятія.*

Рѣшеніе. На каждые 250 рублей получено всего 27 рублей, значитъ на каждый рубль $^{27}/_{250}$, а на каждые 100 рублей

$$\frac{27 \times 100}{250} = \frac{27 \times 2}{5} = 10,8\%.$$

5) *Капиталъ въ 3750 рублей по прошествіи 3 лѣтъ 6 мѣсяцевъ принесъ процентовъ $719^{1}/_{4}$ рубля. Надобно узнать величину процента.*

Рѣшеніе. 2 года 6 мѣсяцевъ = 30 мѣсяцамъ.

Если въ 30 мѣсяцевъ получено прибыли $719^{1}/_{4}$ руб. или $\frac{2877}{4}$ руб., то въ 1 мѣс. получится въ 30 разъ менѣе, или $\frac{2877}{4 \times 30}$ руб., а въ 12 мѣсяцевъ, или въ 1 годъ, въ 12 разъ болѣе послѣдняго числа; т. е.

$$\frac{2877 \times 12}{4 \times 30}$$

Но это число процентовъ съ 3750 руб. Итакъ, чтобъ узнать проценты со 100 рублей, надобно помножить его на $\frac{100}{3750}$.

Слѣдовательно

$$x = \frac{2877 \times 12 \times 100}{4 \times 30 \times 3750} = 7,672\%.$$

6) *Каковъ былъ первоначальный капиталъ, который по прошествіи года обратился въ 2000 рублей, принеся 8%?*

Рѣшеніе. Каждые 100 рублей по прошествіи года обратились въ въ 108 рублей, отсюда видно, что первоначальный капиталъ составляетъ отъ 2000 рублей $^{100}/_{108}$ или $^{25}/_{27}$ долей.

$$x = \frac{2000 \times 25}{27} = 1851,851851 \ldots \text{ руб.}$$

7) *Найти капиталъ, который будучи сложенъ съ пятилѣтними процентами, считая по 4 со ста, составляетъ сумму 8208 рублей.*

Рѣшеніе. Въ одинъ годъ получено было прибыли на каждый рубль $^4/_{100}$ р. или $^1/_{25}$ р.; поэтому въ 5 лѣтъ, считая простые проценты, было прибыли съ рубля $^5/_{25}$ или $^1/_5$ руб. Въ числѣ 8208 рублей заключаются и первоначальный капиталъ, и пятилѣтніе простые проценты. Такимъ образомъ очевидно, что въ 8208 рубляхъ содержатся $^6/_5$ долей первоначальнаго капитала.

Отсюда

$$x = \frac{8208 \times 5}{6} = 6840 \text{ рублямъ.}$$

8) *Въ какое время капиталъ въ 1000 рублей, отданный въ банкъ по 4%, принесетъ 48 рублей простыхъ процентовъ?*

Рѣшеніе. 48 рублей простыхъ процентовъ получены съ 1000 рублей, значитъ съ 1 рубля прибыль равняется $^{48}/_{1000}$. Но, по условію задачи, годовые проценты составляютъ отъ капитала $^4/_{100}$ или $^{40}/_{1000}$. Слѣдовательно во сколько разъ 48 болѣе 40, во столько разъ болѣе одного года капиталъ въ 1000 рублей долженъ обращаться въ банкѣ, для полученія съ него 48 рублей процентовъ; именно $^{48}/_{40}$ или $^6/_5$ года, что составляетъ 1 годъ 2 мѣсяца и 12 дней.

Всѣ сюда относящіяся задачи могутъ быть слѣдующихъ четырехъ разрядовъ:

1) Когда по даннымъ: первоначальному капиталу, времени обращенія его и процентамъ, требуется опредѣлить приращенный капиталъ.

2) По первоначальному и приращенному капиталамъ, также времени, опредѣлить величину процента.

3) По первоначальному и приращенному капиталамъ, также величинѣ процента узнать время, въ которое капиталъ находился въ обращеніи.

4) По приращенному капиталу, времени обращенія и процентамъ опредѣлить первоначальный капиталъ.

б) *Сложные проценты.*

Задачи, относящіяся къ показаннымъ четыремъ разрядамъ, при сложныхъ процентахъ, часто становятся весьма затруднительными безъ помощи особыхъ формулъ, предлагаемыхъ Алгеброю, гдѣ онѣ рѣшаются очень просто. Для лицъ же, часто нуждающихся въ подобныхъ вычисленіяхъ, составлены особыя таблицы, содержащія въ себѣ готовые результаты, которые потомъ, при незначительныхъ выкладкахъ, уже нетрудно примѣнять къ встрѣчающимся на практикѣ

случаямъ. Поэтому мы здѣсь должны ограничиться весьма немногимъ, что заключается въ средствахъ Ариѳметики.

1. *Требуется узнать, сколько получится процентовъ съ 5000 рублей за 2 года и 9 мѣсяцевъ, по $3^1/_2$ со ста въ годъ, считая проценты на проценты?*

Рѣшеніе. Сперва вычислимъ проценты за 1 годъ. Когда со 100 получается $3^1/_2$ или $^7/_2$ %, то съ 1 рубля $^7/_{200}$ руб., съ 5000 рублей

$$\frac{5000 \times 7}{200} = 175 \text{ руб.}$$

Послѣднее число показываетъ, что по прошествіи года данный капиталъ возрастаетъ до 5175 рублей. Исчислимъ теперь проценты съ этого послѣдняго капитала за второй годъ.

За второй годъ съ 5175 рублей получится

$$\frac{5175 \times 7}{200} = 181,125 \text{ руб.}$$

Приложивъ эти проценты къ 5175 руб., получимъ 5356,125 руб., т. е. первоначальный капиталъ, возросшій по прошествіи двухъ лѣтъ. Остается такимъ же образомъ вычислить проценты за третій годъ, и отъ полученнаго числа взять $^9/_{12}$ или $^3/_4$, потому что въ третьемъ году капиталъ остается въ оборотѣ не весь годъ, а только 9 мѣсяцевъ, что составляетъ $^3/_4$ года.

$$\frac{5356,125 \times 7 \times 3}{200 \times 4} = \frac{53,56125 \times 21}{800} = 140,59828 \;.\;.\;.\;.\; \text{руб.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5356,125 \\ +\,140,59828 \\ \hline 5496,72328 \end{array}\right\}$$

Отсюда видно, что въ продолженіе 2 лѣтъ и 9 мѣсяцевъ капиталъ 5000 возрастаетъ до 5496 руб. 72 коп., такъ что одниxъ процентовъ получится 496 р. 72 к.

2. *Въ какое время капиталъ, положенный въ банкъ на безсрочное время по 5%, удвоится?*

Рѣшеніе. Такъ какъ проценты всегда считаются со ста, то вычисленія проще производить десятичными дробями.

100 рублей по прошествіи года обращаются въ 105 р.

100 руб. по прошествіи 2-го года:

105
$\times 5$

5,25 + 105 . . . . . . обращаются въ 110,25 руб. (произведеніе уменьшено въ 100 разъ перестановкою запятой).

Тѣ же 100 рублей по прошествіи трехъ лѣтъ:

110,25
$\times 5$

5,5125 + 110,25 . . . . 115,7625 руб.

По истеченіи 4-хъ лѣтъ:

115,7625
$\times 5$

5,788125 + 115,7625. . . . . 121,550625 руб.

Продолжая поступать такимъ же образомъ, въ концѣ 14-го года получимъ число 197,9932 рубля, а въ концѣ 15-го 207,8928 рублей. Это показываетъ, что чрезъ 14 лѣтъ, вмѣсто каждыхъ 100 рублей, получится 197 р. 99 к., а чрезъ 15 лѣтъ 207 рублей 89 коп. Отсюда видно, что капиталъ удвоится слишкомъ чрезъ 14 лѣтъ.

Предложенное рѣшеніе показываетъ, сколь продолжительны и вмѣстѣ утомительны подобныя выкладки. Но въ Ариѳметикѣ нѣтъ способовъ упрощать такого рода рѣшенія, развѣ только съ помощью особо для того составленныхъ таблицъ, о которыхъ мы выше упомянули.

Помѣщаемая здѣсь таблица показываетъ, сколько *единица* капитала (напр. 1 рубль) возрастетъ по прошествіи 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. лѣтъ, при 1, 2, 3, 4, 5, и 6 процентахъ, какъ болѣе употребительныхъ. Соображаясь съ рѣшеніемъ послѣдней задачи, легко поймете, какъ составляются такія таблицы.

ГОДЫ.	единица капитала съ 2%.	единица капитала съ 3%.	единица капитала съ 4%.	единица капитала съ 5%.	единица капитала съ 6%.
1	1,020000	1,030000	1,040000	1,050000	1,060000
2	1,040400	1,060900	1,081600	1,102500	1,123600
3	1,061208	1,092727	1,124864	1,157625	1,191016
4	1,082432	1,125509	1,169859	1,215506	1,262477
5	1,104081	1,159274	1,216653	1,276282	1,338226
6	1,126162	1,194052	1,265320	1,340096	1,418519
7	1,148686	1,229874	1,315932	1,407100	1,503630
8	1,171659	1,266770	1,368569	1,477455	1,593848
9	1,195093	1,304773	1,423312	1,551328	1,689479
10	1,218994	1,343916	1,480244	1,628895	1,790848
11	1,243374	1,384234	1,539454	1,710339	1,898299
12	1,268242	1,425761	1,601032	1,795856	2,012196
13	1,293607	1,468534	1,665074	1,885649	2,132928
14	1,319479	1,512590	1,731676	1,979932	2,260904
15	1,345868	1,557967	1,800944	2,078928	2,396558
16	1,372786	1,604706	1,872981	2,182875	2,540352
17	1,400241	1,652848	1,947901	2,292018	2,692773
18	1,428246	1,702433	2,025817	2,406619	2,854339
19	1,456811	1,753506	2,106849	2,526950	3,025600
20	1,485947	1,806111	2,191123	2,653298	3,207135
21	1,515666	1,860295	2,278768	2,785963	3,399564
22	1,545980	1,916103	2,369919	2,925261	3,603537
23	1,576899	1,973587	2 464716	3,071524	3,819750
24	1,608437	2,032794	2,563304	3,225100	4,048935
25	1,640606	2,093778	2,665836	3,386355	4,291871

Узнать, сколько получится процентовъ съ 3000 рублей въ теченіе 7 лѣтъ, считая по 3% въ годъ и проценты на проценты.

Рѣшеніе. Въ таблицѣ противъ 7 лѣтъ, въ столбцѣ второмъ, озаглавленномъ такъ: «единица капитала съ 3%», стоитъ число 1,229874. Это число показываетъ, что 1 рубль, отданный въ ростъ по 3% и считая проценты на проценты, обратится по прошествіи 7 лѣтъ въ 1,229874 рубля. Слѣдовательно 3000 рублей, въ то же время обратятся

въ 3000 $\times$ 1,229874 р. = 3689,622 руб.

Поэтому процентовъ получится 689 руб. 62⅕ коп.

Одинъ купецъ отдалъ другому подъ вексель 4000 руб., по 6 процентовъ, срокомъ отъ 1-го декабря 1860 года по 1-е іюля 1869 года,

всего на 9 лѣтъ 7 мѣсяцевъ. Спрашивается: въ какую сумму должно было написать вексель, если въ нее должны были войти и проценты на проценты за все время?

Рѣшеніе. 9 лѣтъ 7 мѣсяцевъ $= 9^7/_{12}$ годамъ.

Вычислимъ сперва капиталъ съ процентами за 9 лѣтъ.

Въ таблицѣ противъ 9 лѣтъ, въ послѣднемъ столбцѣ находится число 1,689479.

$$4000 \times 1{,}689479 = 6757{,}916 \text{ руб.}$$

Сюда надо приложить проценты съ 6757,916 руб. за 7 мѣсяцевъ 10-го года.

Съ 6757,916 за цѣлый годъ получится:

$$\begin{array}{r} 6757{,}916 \\ \times\, 0{,}06 \\ \hline 405{,}47496 \text{ р.} \end{array}$$

А за 7 мѣсяцевъ: $\dfrac{405{,}47496 \times 7}{12} = 236{,}52706$ р.

$$\begin{array}{r} 6757{,}91600 \text{ руб.} \\ 236{,}52706 \;\;\text{»}\;\; \\ \hline 6994{,}44306 \text{ руб.} \end{array}$$

Итакъ вексель долженъ быть написанъ на сумму 6994 руб. 44 коп. [1]).

в) *Учетъ (дисконтъ) векселей.*

Подъ именемъ *векселя* разумѣютъ въ торговлѣ законное письменное обязательство въ уплатѣ опредѣленной суммы, занятой на извѣстный срокъ времени. Сумма, на которую пишется вексель, содержитъ въ себѣ не только занятый капиталъ, но также и проценты, которые слѣдуютъ съ капитала съ того времени, когда сдѣланъ заемъ, до срока платежа по векселю. Такъ вексель, написанный на сумму 1080 руб. (по 8%) и данный на годъ, показываетъ, что занято всего капитала 1000 рублей, а 80 рублей собственно проценты, которые наростутъ къ сроку платежа векселя. Поэтому очевидно, что когда вексель уплачивается до срока, положимъ за нѣсколько мѣсяцевъ впередъ, то по справедливости изъ общей

---

[1]) Мелкія дроби отбрасываются.

суммы должно вычесть проценты, которые вошли въ вексель за эти мѣсяцы. Такимъ образомъ вексель въ 1080 руб., уплачиваемый до срока, не составляетъ 1080 руб., а менѣе. Это дѣйствіе въ торговлѣ извѣстно подъ выраженіемъ *«сдѣлать учетъ векселю»* или *«дисконтировать вексель»*.

Учесть вексель въ 1200 рублей, данный на годъ по 6%, но уплачиваемый за 4 мѣсяца до срока.

Рѣшеніе. Если въ годъ 6%, то въ 4 мѣсяца 2%. Поэтому четырехмѣсячный учетъ съ каждой сотни равенъ 2 рублямъ, или все тоже, каждые 102 рубля, платимые по истеченіи четырехмѣсячнаго срока, обращаются въ 100 рублей, платимыхъ за 4 мѣсяца впередъ. Значитъ дѣйствительная цѣна векселя составляетъ отъ 1200 рублей $^{100}/_{102}$ доли.

$$x = \frac{1200 \times 100}{102} = 1176,47 \text{ руб.}$$

А учетъ составляетъ 1200 — 1176,47 = 23 руб. 53 коп.

2. *Спрашивается настоящая цѣна векселя въ 4850 р., по $^{3}/_{4}$% въ мѣсяцъ, которому срокъ уплаты чрезъ $13^{1}/_{2}$ мѣсяцевъ.*

Рѣшеніе. Въ мѣсяцъ на 100 получается $^{3}/_{4}$%, чрезъ $13^{1}/_{2}$ мѣсяцевъ получится въ $13^{1}/_{2}$ разъ болѣе. $^{3}/_{4} \times 13^{1}/_{2} = 10,125$. Изъ этого видно, что каждые 100 рублей первоначальнаго капитала равняются 110,125 руб, получаемымъ по прошествіи $13^{1}/_{2}$ мѣсяцевъ. Такимъ образомъ

$$x = \frac{4850 \times 100}{110,125} = 4404,08 \text{ руб.}$$

2. *Измѣненіе сроковъ платежа (разсрочка).*

Это иногда называютъ *«правиломъ для времени денежныхъ уплатъ»*. Положимъ, что нѣкто, взявъ товаръ на кредитъ, обязался уплатить за него въ разные сроки; но, по разнымъ обстоятельствамъ, часть должныхъ имъ денегъ платитъ до срока, а часть позже срока, съ условіемъ впрочемъ, чтобъ оттого не страдалъ кредиторъ. Такимъ образомъ является надобность опредѣлить новые сроки или для платежа всего долга или только какой-либо части его. Само собою разумѣется, что новыя суммы должны опредѣляться соразмѣрно времени разсрочекъ, количеству самыхъ разсрочиваемыхъ суммъ и

условленнымъ процентамъ. Очевидно опять, что все дѣло тутъ въ соображеніяхъ, а не въ какихъ-либо новыхъ правилахъ.

Купецъ А, получивъ товаръ на кредитъ, далъ векселей за него на сумму 5000 рублей, обязываясь уплатить по нимъ половину всей суммы чрезъ 6 мѣсяцевъ, $^1/_8$ суммы чрезъ 10 мѣсяцевъ, а остальные по прошествіи года. По разнымъ обстоятельствамъ, не будучи въ состояніи уплатить по первому сроку, онъ зато заплатилъ кредитору своему всю сумму за разъ, раньше другихъ сроковъ, при чемъ интересы и кредитора и должника нисколько отъ этого не пострадали. Опредѣлить время, въ которое купецъ А заплатилъ вдругъ весь свой долгъ.

Рѣшеніе. Изъ условій задачи видно, что

2500 руб.	($^1/_2$ долга)	должно	уплатить	чрезъ	6	мѣсяцевъ.
625 ›	($^1/_8$ долга)	›	›	›	10	›
1875 ›	(остальные)	›	›	›	12	›

Но эти суммы принесутъ такую же прибыль, какую слѣдующія суммы въ 1 мѣсяцъ:

$$2500 \times 6 = 15000$$
$$625 \times 10 = 6250$$
$$1875 \times 12 = 22500$$
$$43750$$

Чтобы 5000 рублей могли доставить такую же прибыль, какую доставляютъ 43750 *въ одинъ мѣсяцъ*, для того должно пройти во столько разъ болѣе мѣсяца, во сколько разъ 5000 менѣе 43750.

Итакъ

$$x = \frac{43750}{5000} = 8^3/_4 \text{ мѣсяца или 8 мѣс. } 22^1/_2 \text{ дня.}$$

§ 52.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

1) Сколько получится процентовъ въ три года съ 500 руб., по 4 со ста, не считая процентовъ на проценты?

2) Нѣкто отдалъ въ ростъ 800 рублей по 5%; но ему былъ возвращенъ капиталъ по истеченіи 8 мѣсяцевъ. Спрашивается: сколько онъ получилъ процентовъ за это время?

3) Нѣкто былъ долженъ 15000 рублей съ процентами, по 3 на сто, за 6 лѣтъ, не считая проценты на проценты. Сколько слѣдуетъ ему заплатить за все это время вмѣстѣ съ капиталомъ?

4) Если съ одного рубля получается въ недѣлю три гроша процентовъ, то сколько получится съ 100 рублей въ мѣсяцъ?

5) Домъ купленъ за 25000 руб., но изъ этой суммы уплачено только $^2/_3$, а на остальную треть дано заемное письмо по 8%. Сколько по этому письму слѣдуетъ ежегодно уплатить процентовъ?

6) Половина капитала, состоявшаго изъ 72 тысячъ рублей, отдана въ ростъ по 4%, а другая по 3%. Сколько получается всего процентовъ въ мѣсяцъ?

7) Какой капиталъ дастъ въ годъ, считая по 3%, 205 руб. 74 коп. прибыли?

8) Что придется заплатить банкиру за переводъ изъ С.-Петербурга въ Парижъ 27.800 рублей, платя по $^3/_4$%?

9) Одинъ купецъ далъ другому въ долгъ 35.000 руб. по 5%; должникъ на другой же день возвратилъ кредитору своему 8000 рублей, и тотъ тотчасъ положилъ ихъ въ банкъ по 4%. Спрашивается: сколько получается процентовъ ежемѣсячно со всей суммы 35000 рублей?

10) Нѣкто при продажѣ товаровъ на 77450 рублей получилъ прибыли 14%. Какъ великъ его барышъ?

11) Капиталъ, состоящій изъ 24600 рублей и пущенный въ оборотъ, по прошествіи года возросъ вмѣстѣ съ процентами до 27880 руб. Узнать, сколько процентовъ со ста составляетъ прибыль?

12) Нѣкто на занятый капиталъ ежегодно платитъ своему кредитору 1242 рубля процентовъ, считая по $6^3/_4$ со ста. Сколько онъ долженъ?

13) На занятый капиталъ, отданный въ ростъ по 9%, заплачено процентовъ за 7 мѣсяцевъ 284 рубля 97 копѣекъ. Какъ великъ занятый капиталъ?

14) Виноторговецъ продаетъ каждую бутылку вина по 57 коп., а при продажѣ имѣетъ прибыли $7^2/_7$%. Спрашивается: сколько онъ заплатилъ за бочку этого вина, въ которой было 280 бутылокъ?

15) Управитель фабрики получаетъ отъ хозяина за свои труды 8,12% со всего ежегоднаго дохода, доставляемаго фабрикою. Хозяинъ, по прошествіи года, получилъ доходу 12521,23 руб. за вычетомъ того, что слѣдовало управителю по условію. Какъ великъ весь доходъ съ фабрики?

16) Книгопродавецъ за отданныя ему на коммиссію для продажи книги получаетъ 20%. Спрашивется: сколько было отдано ему для продажи экземпляровъ, когда каждый экземпляръ продавался по 1 рублю 30 коп. и если за коммиссію получилъ онъ всего 187 рублей 20 копѣекъ?

17) При одномъ торговомъ предпріятіи весь понесенный убытокъ, равнявшійся 4689 рублямъ, составлялъ отъ первоначальнаго капитала 13,2%. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ, положенный въ торгъ?

18) Узнать сколько причтется въ каждую треть года получить

процентовъ съ капитала 189896 руб., отданныхъ въ ростъ по $7^1/_2$% въ годъ.

19) Помѣстье, купленное за 234.500 рублей, приноситъ ежегодно доходу 15000 руб. Какой процентъ составляетъ это отъ капитала?

20) Требуется узнать, сколько получится процентовъ съ 2400 рублей за 3 года 5 мѣсяцевъ, по $4^1/_2$%, считая проценты на проценты.

21) Портной взялъ у фабриканта сукна на 3200 руб. въ долгъ на вексель, и согласился на требованіе фабриканта написать вексель на 18 мѣсяцевъ, считая по $^3/_4$% на мѣсяцъ. Какую сумму должно было означить въ векселѣ?

22) Какой капиталъ должно отдать въ ростъ, чтобы въ 10 мѣсяцевъ по 4% можно было получить тѣ же самые проценты, какіе даетъ капиталъ 500 руб. въ 8 мѣсяцевъ, по 5%?

23) Изъ С.-Петербурга на Нижегородскую ярмарку отправляется водою товара на 15000 рублей, застрахованнаго въ страховомъ обществѣ по $2^1/_2$%. Какую премію (страховыя деньги) получило послѣднее?

24) Спекулантъ, скупающій заемныя письма, заплатилъ за одно изъ нихъ, суммою въ 5300 руб. по 5%, 4000 руб., а за другое, по которому платится по 6%, вмѣсто каждыхъ 100 рублей только 75 рублей. Спрашивается: сколько онъ будетъ получать процентовъ какъ съ одного, такъ и съ другаго заемнаго письма?

25) Одинъ мастеровой внесъ въ сберегательную кассу 100 р., обѣщая себѣ не вынимать ихъ оттуда въ теченіе пяти лѣтъ. Спрашивается: до какой суммы возрастетъ означенный капиталъ въ этотъ срокъ времени, считая по 4%?

26) На 1000 рублей сколько причитается процентовъ за 6 лѣтъ 8 мѣсяцевъ, считая по 4 на сто?

27) Вычислить, сколько чрезъ пять лѣтъ придется получить денегъ изъ банка, который платитъ по 4%, если сначала было положено въ него 1000 руб., а потомъ, по прошествіи 1-го, 2-го, 3-го и 4-го годовъ было ежегодно прибавляемо къ первоначальному вкладу по 1000 рублей?

28) Чрезъ сколько лѣтъ капиталъ, приносящій 4% удвоивается?

29) Чрезъ сколько лѣтъ окупится домъ, приносящій чистаго доходу 8%?

30) Нѣкто желаетъ внести такую сумму въ банкъ, чтобы по прошествіи пяти лѣтъ онъ могъ получить обратно капиталъ вмѣстѣ съ процентами въ 10.000 руб. Спрашивается: сколько онъ долженъ для того положить въ банкъ, который платитъ по 4%?

31) 300 рублей принесли въ $6^1/_2$ мѣсяцевъ 19 рублей процентовъ; сколько по этому расчету принесутъ процентовъ 2700 руб. въ $4^2/_3$ года?

32) Нѣкто отдалъ въ проценты 569 рублей, и по прошествіи $11^1/_2$ мѣсяцевъ получилъ 590 рублей $81^1/_6$ копѣйки. Сыскать, какъ были велики годовые проценты?

33) Нѣкто желаетъ получить деньги по векселю въ 2340 рублей, которому срокъ чрезъ 7 мѣсяцевъ, съ учетомъ по 5 процентовъ въ годъ. Сколько ему должно получить?

34) Учесть вексель въ 2400 руб., уплачиваемый въ 8 мѣсяцевъ и 12 дней до срока, по 6,5% въ годъ.

35) Нѣкто получилъ дохода съ дому за годъ впередъ, за вычетомъ 4%, всего 7845 рублей 35 копѣекъ. Сколько бы онъ получилъ дохода по истеченіи года?

36) Купецъ продалъ товару на вексель въ 86000 рублей, данный на 14 мѣсяцевъ, и обѣщалъ сдѣлать уступку (скидку, *рабатъ*) по полтинѣ со 100 руб въ мѣсяцъ, если тотъ вексель будетъ уплаченъ ранѣе срока за нѣсколько мѣсяцевъ. Ему уплачиваютъ за 10 мѣсяцевъ до срока. Спрашивается: какую сумму онъ получить долженъ за скидкою?

37) Опредѣлить учетъ векселя въ 5000 рублей, предъявленнаго за 4 недѣли до срока, по 6,12%?

§ 53.

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ НА ВСѢ ПРАВИЛА АРИѲМЕТИКИ.

1) Экономкѣ было дано денегъ на покупку слѣдующихъ припасовъ:

1) На 4 фунта кофе.	1 р.	24 к.
2) » 20 » сахару	5 »	— »
3) » молоко	— »	20 »
4) » 10 фунт. говядины . . .	1 »	20 »
5) » часть телятины.	4 »	80 »

6) » три трехкопѣечныя булки и на пять шестикопѣечныхъ хлѣбовъ.

На означенные припасы она купила по слѣдующимъ цѣнамъ:

1) Фунтъ кофе . . .	по	28 коп.
2) » сахару . .	»	23 »
3) » говядины. .	»	10 »
4) Часть телятины . .	за 3 р.	75 »

Спрашивается: сколько экономка издержала всего денегъ и чѣмъ дешевле купила она всѣ припасы противъ данныхъ ей денегъ?

2) Европа содержитъ въ себѣ 146.857 квадратныхъ миль, и на этомъ пространствѣ земли живетъ 245.382.000 человѣкъ. Спрашивается: по сколько причитается жителей на каждую квадратную милю?

3) 27 работниковъ въ 9 дней срубили одинъ флигель; въ какое время срубили бы тотъ же флигель 32 работника?

4) Если нѣкто имѣетъ тысячу рублей ежегоднаго дохода и изъ нея издерживаетъ 4-ю долю на столъ, 6-ю часть на платье, 8-ю на

удовольствія, 9-ю на прислугу и 10-ю на разныя мелкія надобности; что спрашивается: 1) сколько онъ издерживаетъ на каждую часть? 2) сколько издерживаетъ всего? 3) сколько у него остается?

5) Одинъ отецъ оставилъ послѣ своей смерти шестерымъ своимъ сыновьямъ милліонъ рублей наслѣдства и велѣлъ это наслѣдство раздѣлить между ними соразмѣрно лѣтамъ каждаго; старшему было 24 года, второму 19 лѣтъ, третьему 18, четвертому 16, пятому 15 и шестому 13. Спрашивается; по сколько каждый получилъ?

6) Купецъ просилъ товарища своего купить ему на ярмаркѣ 200 аршинъ сукна за 3300 рублей; товарищъ могъ достать для него только 173 аршина такого сукна, какого купецъ желалъ, и то 50 копѣйками дороже за аршинъ. Сколько причитается купцу обратно получить денегъ?

7) Сложить слѣдующія дроби: $^2/_3$, $^5/_6$, $^{11}/_{24}$, $^8/_{27}$?

8) Огнедышащая гора Этна, на островѣ Сициліи, имѣетъ вышины 10.630 футовъ, а Везувій, близъ Неаполя, 3283 фута. Чѣмъ Этна выше Везувія?

9) Сколько составятъ вмѣстѣ: 2 берк. 7 пуд. 13 ф. $5^2/_7$ лот. + 5 берк. 9 пуд. 18 фунт. $9^5/_6$ лот. + 4 берк. 8 пуд. 19 фунт. $11^3/_4$ лот. + 20 берк. 3 пуд. 7 фунт.?

10) Сколько серебряныхъ рублей стóитъ англійскій военный корабль, который оцѣненъ въ 35.553 гиней?

11) Нѣкто купилъ $5^3/_4$ четвертей пшеницы, по 12 рублей за четверть, и $7^5/_8$ четвертей овса, по 7 руб. 76 коп. и, расплатясь съ купцомъ за купленный хлѣбъ, нашелъ, что оставшіеся у него деньги составляютъ $^6/_7$ отъ той суммы, которую онъ имѣлъ до покупки хлѣба. Сколько онъ имѣлъ денегъ?

12) На 2 рубля 75 копѣекъ куплено 2 фунта 3 лота шерсти; сколько можно купить такой же шерсти на 9 рублей 25 копѣекъ?

13) Нѣкто купилъ 12 бочекъ сороковыхъ и 23 ведра полугарнаго вина, платя за ведро по 3 руб. 50 коп., и 17 пятиведерныхъ бочекъ и 3 ведра пѣннаго вина, платя за ведро по 6 руб. 75 коп.; сколько онъ заплатилъ денегъ за все вино?

14) Нѣкто расчитываетъ свой ежегодный доходъ. Онъ получаетъ ежемѣсячно: 66 руб. $66^2/_3$ коп. жалованья, 16 руб. $66^2/_3$ коп. на квартиру, три сажени дровъ, изъ которыхъ каждая сажень съ возкою и пилкою обходится въ 11 руб. $23^1/_4$ коп., 1 пудъ 10 фунтовъ муки, фунтъ которой въ сложности обходится въ 2 коп. съ денежкою; да на разные припасы 8 р. $64^1/_3$ копѣйки. Требуется опредѣлить его ежегодный доходъ.

15) Сколько будетъ четвертей фунта въ $8172^3/_4$ фунта?

16) Куплено льнянаго сѣмени 4500 бочекъ, и за каждую заплачено 13 руб. 75 копѣекъ. Что стóитъ весь товаръ?

17) Два купца мѣняются товарами: у одного имѣется 205 берковцевъ 8 пудовъ $5^3/_4$ фун. пеньки, по 3 руб. 20 коп. каждый пудъ, а у другаго сахаръ, по $23^{17}/_{21}$ копѣйки фунтъ. Нужно узнать: сколько сахару за пеньку взять должно?

18) Въ крѣпости запасено провіанту на 50 дней. Но гарнизонъ ея увеличенъ на $^1/_4$ прежняго числа людей, и ему приказано продовольствоваться тѣмъ же провіантомъ 45 дней. Спрашивается: какую часть прежде назначенной порціи должно давать людямъ, чтобы стало запасеннаго провіанту на опредѣленный срокъ?

19) Чрезъ $2^1/_2$ года, на 500 рублей, сколько должно получить процентовъ, считая по пяти на сто?

20) Когда въ 5 мѣсяцевъ и $9^3/_8$ дня выткано мастеровыми, которые ежедневно работали по $7^1/_2$ часовъ, 176 концовъ сукна, длиною каждый въ 25 аршинъ: то въ какое время то же число работниковъ могутъ выткать 300 концовъ сукна, длиною каждый по 35 аршинъ, работая въ день по 8 часовъ?

21) Нѣкто имѣетъ такой кусокъ серебра, что если изъ $^2/_3$ его вѣсу вычесть $^3/_{11}$, то останется $25^3/_4$ лота. Найти вѣсъ всего куска.

22) Знаменитый поэтъ Державинъ родился 3-го іюля 1743 года, въ Казани, а скончался 8-го іюля 1816 года. Сколько онъ жилъ?

23) Нѣкто купилъ два мѣха хлопчатой бумаги, въ одномъ было вѣсу 113 фунтовъ, а въ другомъ 425 фунтовъ; онъ платилъ за каждые 25 фунтовъ по 11 р. 20 коп. Узнать цѣну обоихъ мѣховъ.

24) Сложить дроби: $^2/_5$, $^3/_4$, $^5/_9$ и $^7/_8$.

25) Вычислить слѣдующую формулу:

$$\frac{(59 \text{ п. } 17 \text{ ф. } + 11 \text{ п. } 29 \text{ ф. } 3 \text{ лота } - 39 \text{ ф. } 31 \text{. лот.}) \times 5^2/_5}{0{,}0297.}$$

26) 6-го іюня приказано было полку выступить въ походъ и прибыть на мѣсто назначенія къ 25 числу того же мѣсяца; но въ самое время выступленія полка прислано было съ курьеромъ другое приказаніе, по которому велѣно полку прибыть къ мѣсту назначенія 21-го числа того же мѣсяца. По сдѣланіи расчета оказалось, чтобы прибыть къ сроку въ назначенное мѣсто и употреблять по прежнему третій день на дневку или отдыхъ, надобно ускорить маршъ 7-ю верстами ежедневно болѣе прежняго. Требуется узнать, сколько всего верстъ долженъ перейти полкъ.

27) Въ 1830 году привезено было товаровъ на Нижегородскую ярмарку на 116.818.000 руб. ассигн. Въ этомъ числѣ товаровъ азіятскихъ было на 17.385.000 руб. ассигн., а европейскихъ и колоніальныхъ на 15.433.000 руб. ассигн.; всю остальную сумму составляли русскія произведенія. Узнать, сколько рублей серебромъ составляла эта послѣдняя сумма.

28) Вычислить формулу:

$$\frac{99{,}7345 \text{ саж. } 0{,}91 \text{ ф. } 4{,}357 \text{ дюйм.} - 89{,}3 \text{ саж. } 9{,}51 \text{ дюйм.}}{^2/_5 - 0{,}0179.}$$

29) Два купца купили партію сахару, платя за каждый пудъ по 9 р. $35^5/_7$ к. Этотъ сахаръ они раздѣлили между собою въ томъ же отношеніи, въ какомъ находятся числа 1 и 4. Получившій боль-

шую часть перепродалъ третьему купцу $^5/_8$ своей покупки за $731^5/_7$ руб. Такою перепродажею онъ не только покрылъ издержки, употребленныя имъ на покупку сахара, но еще получилъ прибыли $20^4/_7$ р., исключая оставшейся у него части. Спрашивается: сколько всего пудовъ содержалось въ партіи?

30) Найти сумму, разность, произведеніе и частное слѣдующихъ дробей: 0,020914 и 2,419?

31) Если 940 рублей въ три года принесли процентовъ 129 рублей 74 копѣйки, то сколько принесетъ процентовъ капиталъ въ 5000 руб., отданный на 7 лѣтъ?

32) Привести въ меньшій видъ слѣдующія дроби:

а) $\frac{6762}{12880}$ б) $\frac{266805}{495495}$

33) Найти три приближенныя величины слѣдующей несокращаемой дроби: $\frac{907}{18564}$

34) Къ намъ обращенная часть солнца содержитъ въ себѣ 57.645.845.812 квадр. географическихъ миль, а Франція занимаетъ пространства 10.086 квадр. географич. миль. Спрашивается: сколько разъ Франція можетъ помѣститься на поверхности солнечнаго полушарія?

35) Нѣкто купилъ сукна $56^5/_8$ аршина и далъ за него 490 руб. 75 копѣекъ, а продалъ каждый аршинъ по 11 руб. 25 коп. Спрашивается: сколько онъ получилъ всего прибыли?

36) Куплено на плащъ 16 аршинъ матеріи, шириною въ 1 аршинъ 4 вершка. Сколько нужно будетъ купить тафты на подкладку, которой ширина 14 вершковъ?

37) Три купца: А, Б и В внесли въ общій торгъ 50.000 руб. А внесъ 10.000 рублей на 3 мѣсяца, Б — 27.000 рублей на 9 мѣсяцевъ, а В — остальные безсрочно. По окончаніи года они получили прибытка отъ торговли 7500 рублей. Спрашивается: по скольку каждый получилъ?

38) Двое, отправясь изъ разныхъ мѣстъ, находящихся на разстояніи 495 верстъ одно отъ другаго, ѣдутъ другъ другу на встрѣчу. Сколько верстъ проѣдетъ каждый, если первый проѣзжаетъ въ каждые 5 часовъ по 60 верстъ, который къ тому же выѣхалъ тремя часами ранѣе втораго, а второй въ каждые два часа проѣзжаетъ по 27 верстъ?

39) Нѣкто былъ въ отлучкѣ 7 лѣтъ 6 мѣсяцевъ и 10 минутъ. Онъ отъѣхалъ 13-го октября 1832 года, въ 4 часа пополудни. Котораго числа онъ возвратился?

40) Если отъ $35^3/_4$ рубля отнять сперва $11^1/_2$, и потомъ еще $7^2/_3$ рубля, то сколько останется?

41) Переложить 27.571 руб. 17 коп. ассигн. на серебро, считая 1 руб. серебра въ 3 р. 50 коп. ассигн.

42) Переложить 18.309 руб. 81 коп. серебра на ассигнаціи.

43) Какое это число, которое, будучи умножено само на себя, даетъ въ произведеніи то же самое число.

44) Найти неизвѣстное число, котораго $^1/_5$, умноженная на $^1/_4$ того же неизвѣстнаго, даетъ въ произведеніи тоже неизвѣстное.

45) $^3/_4$ неизвѣстнаго числа, сложенныя съ $^1/_9$ того же числа и еще съ числомъ 870, даютъ въ суммѣ неизвѣстное число, увеличенное на $^1/_5$ того же числа.

46) Четыре неизвѣстныя числа имѣютъ между собою слѣдующее отношеніе: 9 : 8 : 7 : 6; сумма двухъ среднихъ чиселъ = 405. Опредѣлить, чему равно каждое число.

47) Трое купили 324 аршина кружевъ за 6789 рублей 50 копѣекъ; одинъ получилъ за свои деньги 170 аршинъ, другой 89 арш., а третій остальное. Сколько каждый изъ нихъ заплатилъ денегъ?

48) Взять отъ $^7/_{11}$ три пятыя части и привести ихъ въ десятичную дробь.

49) Нѣкто взялъ въ долгъ 27 пудовъ товару на 1147 рублей 50 коп.; онъ заплатилъ потомъ деньги за 12 пудовъ 18 фунтовъ. Сколько еще на немъ долгу?

50) Куплено $14^3/_4$ фунта сахару за 4 р. $68^4/_7$ к., и требуется его промѣнять на другой по $26^2/_7$ к. фунтъ. Спрашивается: сколько фунтовъ дадутъ въ промѣнъ?

51) Нѣкто долженъ послать въ Берлинъ изъ С.-Петербурга 1000 рублей. Спрашивается: сколько эта сумма составляетъ въ Берлинѣ червонцевъ? — Положимъ, что курсъ въ С.-Петербургѣ $47^1/_2$ штиверовъ (то есть 1 рубль стоитъ $47^1/_2$ штиверовъ голландскихъ, или два рубля стоятъ 95 штив. голланд.); въ Голландіи 20 штиверовъ составляютъ 1 гульденъ; а $2^1/_2$ голландскихъ гульдена = голланд. ефимку; пусть курсъ изъ Голландіи въ Берлинъ 142, то есть за 100 ефимковъ платятъ въ Берлинѣ 142 талера; наконецъ, 1 червонецъ берлинскій содержитъ въ себѣ 3 талера.

52) Слуга нанялся у одного господина на 4 мѣсяца и 15 дней съ тѣмъ условіемъ, чтобы за каждый заработанный имъ день ему было заплачено по 40 коп., а за каждый прогульный день онъ долженъ давать господину за кушанье $17^1/_7$ к.; по окончаніи срока слуга отошелъ безъ всякой платы. Надобно знать, сколько дней онъ прогулялъ.

53) Сумма трехъ чиселъ = 624. первое болѣе третьяго въ 7 разъ, а если отъ суммы перваго и третьяго взять пятую долю, то получится второе. Найти всѣ три числа.

54) Сумма двухъ чиселъ = 79,746. Если отъ большаго отнять $^2/_3$ и приложить къ меньшему, то оба числа будутъ равны. Найти эти числа.

55) Пятерное неизвѣстное число безъ двойнаго неизвѣстнаго = 6,4309. Опредѣлить неизвѣстное.

56) Я теперь старѣе тебя, говорилъ отецъ сыну своему, въ 9 разъ, а чрезъ 12 лѣтъ я буду только втрое тебя старѣе. Узнать настоящія лѣта отца и сына.

57) Сумма двухъ чиселъ = 3,7914, а разность = $^2/_5$. Опредѣлить оба числа.

58) Доставка изъ Твери въ С.-Петербургъ обходится по $8^4/_7$ коп. съ пуда. Что долженъ заплатить купецъ за доставку изъ Твери въ С.-Петербургъ 1482 пуда товару?

59) Какую часть составляютъ 3 гривны 7 копѣекъ отъ одного рубля?

60) Что стоитъ библіотека, размѣщенная въ 15 шкафахъ, изъ которыхъ въ каждомъ по 7 полокъ, на каждой полкѣ по 26 книгъ, а каждая книга среднимъ числомъ стоитъ 4 руб. 75 коп.?

61) Нѣкто купилъ 12 фунтовъ чаю: 3 фунта по $4^2/_7$ руб. каждый, 5 фунтовъ по $3^5/_7$ руб. каждый, и 4 фунт. по $2^6/_7$ рубля. Смѣшавъ весь купленный чай вмѣстѣ, онъ желаетъ знать, почемъ обойдется ему фунтъ смѣшаннаго чаю.

62) Неизвѣстное число, сложенное съ 70, вчетверо болѣе суммы того же неизвѣстнаго, сложеннаго съ 16. Найти неизвѣстное.

63) За 20 саженъ березовыхъ дровъ и за 17 саж. сосновыхъ заплачено было 235 руб. 20 коп.; въ другой разъ по той же цѣнѣ куплено было 20 саж. березовыхъ и 27 саж. сосновыхъ дровъ за 291 р. 20 к. Спрашивается: что было заплачено за каждую сажень какъ березовыхъ такъ и сосновыхъ дровъ?

64) Трое издержали вмѣстѣ 130 р. 50 коп. Издержка перваго съ издержкою втораго составляютъ 75 рублей, издержка перваго съ издержкою третьяго = 90 руб. 50 коп., а издержка втораго съ издержкою третьяго = 95 руб. 50 копѣйкамъ. Опредѣлить, сколько издержалъ каждый.

65) Отъ Кронштадта до острова Сескара 75 верстъ, отъ Сескара такое же разстояніе до острова Готланда, а отъ послѣдняго до Ревеля 150 верстъ. Спрашивается: въ какое время доплыветъ корабль отъ Кронштадта до Ревеля, полагая, что онъ идетъ въ часъ по $10^1/_2$ верстъ?

66) Изъ трехъ мельницъ, первая въ 12 чосовъ мелетъ 15, другая 12, а третья 14 четвертей ржи. Во сколько времени на всѣхъ трехъ мельницахъ можно смолоть 200 четвертей ржи?

67) Корабль переплылъ однимъ вѣтромъ въ трои сутки 275 морскихъ или итальянскихъ миль. Спрашивается: во сколько времени онъ можетъ переплыть 1420 верстъ русскихъ, полагая всѣ обстоятельства тѣ же?

68) Что стоитъ въ сложности 1 фунтъ сахару, если фунтъ од-

ного сорта стóитъ 30 коп., другаго $25^{5}/_{7}$ коп., третьяго $25^{3}/_{7}$ коп. и четвертаго $20^{6}/_{7}$ копѣекъ?

69) а) Сколько въ одномъ билліонѣ руб. копѣекъ? б) во сколько лѣтъ можно счесть эту сумму копѣекъ, если въ каждую минуту можно счесть 125 копѣекъ?

70) Если большее число сложить съ меньшимъ, то большее число увеличится на десятую часть, а если изъ большаго числа вычесть меньшее, то въ остаткѣ получится 72. Найти оба числа.

71) Купецъ, торгующій хлѣбомъ, хочетъ купить домъ. Если онъ продастъ тотъ хлѣбъ, который имѣетъ, по 5 руб. 45 коп. за куль, то не только въ состояніи будетъ заплатить сполна всѣ деньги за домъ, но у него еще останется 2044 р. 50 коп.; если же онъ продастъ куль по 4 рубля 75 коп., то у него по покупкѣ дома останется только 1262 руб. 50 коп. Спрашивается: сколько купецъ имѣетъ четвертей хлѣба и что стóитъ домъ?

72) Разность двухъ чиселъ $= 3{,}57943$; $^{1}/_{8}$ перваго $= ^{1}/_{7}$ втораго. Найти оба числа.

73) Если неизвѣстное число раздѣлимъ на 9, а частное сложимъ съ дѣлимымъ и дѣлителемъ, то получимъ 899. Найти неизвѣстное.

74) Сумма моихъ денегъ будетъ издержана въ 24 недѣли, если я буду ежедневно издерживать по 3 р. $54^{2}/_{3}$ коп.; я хочу знать, по сколько я могу тратить ежедневно, чтобъ мнѣ стало денегъ на 30 недѣль?

75) Фридрихъ Великій родился 24-го января 1712 года, а 31-го мая 1740 года принялъ правленіе. Какихъ лѣтъ вступилъ онъ на престолъ?

76) Какъ великъ капиталъ, который по 6 на сто столько же приноситъ процентовъ, сколько 1500 рублей по 5 на сто?

77) Извощикъ везетъ товаровъ:

Отъ	А	на	17 пуд.	15	фунт.	вѣсомъ;
»	Б	»	9 »	23	»	»
»	В	»	15 »	35	»	»
»	Г	»	11 »	11	»	»
»	Д	»	17 »	28	»	»

Если онъ за каждый пудъ получаетъ по 32 коп., то сколько онъ получитъ за весь товаръ?

78) $^{5}/_{11} : 2245 = ?$ 79) $0{,}0234 : ^{2}/_{5} = ?$

80) Найти такое число, котораго $^{5}/_{6}$ безъ $^{1}/_{7} = 25^{3}/_{4}$.

81) Требуется знать: сколько въ окружности большаго круга земли англійскихъ футовъ, когда въ ней считается 360 градусовъ, а градусъ $= 104{,}3388$ русскихъ верстъ?

82) Что составитъ сумма издержкамъ на покупку и отправленіе 100 бочекъ чистаго товару:

a) 35 боч. чистаго товару, подъ литер. R, 1564 пуда, по 24 р. 17 коп. за пудъ.

10	›	›	›	подъ лит.	МК,	447	пуд., по	23 р.	50 к.	
10	›	›	›	›	› В,	447	› ›	22 ›	83 ›	
5	›	›	›	›	› МВ,	$223\frac{1}{2}$ ›	›	22 ›	16 ›	
40	›	›	›	›	› М,	$1787\frac{1}{2}$ ›	›	16 ›	12 ›	

100 бочекъ.

b) Консульскихъ 2 процента.

c) Наемъ амбара по 11 коп. съ пуда.

d) Разные расходы при отправленіи по 6 рублей съ бочки.

e) Куртажныхъ $\frac{1}{2}$ процента.

f) За коммиссію 5 процентовъ.

83) Если вычтемъ большее число изъ меньшаго, то въ остаткѣ получимъ $7\frac{5}{6}$, а если раздѣлимъ большее на меньшее, то въ частномъ также получимъ $7\frac{5}{6}$. Найти оба числа.

84) Постройка церкви Св. Петра, въ Римѣ, стóитъ 47112000 римскихъ скуди, а постройка церкви Св. Павла, въ Лондонѣ, стóитъ 736752 фунта стерлинга. Если каждый римскій скуди равняется 1,347 р. сер., а каждый фунтъ стерлингъ = 6 р. 28 коп. сер., то спрашивается:

1) Что стóитъ постройка церкви Св. Петра на русскія деньги?

2) Что стóитъ постройка церкви Св. Павла?

3) Которая церковь больше стóитъ, и чѣмъ именно?

85) Опредѣлить, въ какомъ отношеніи находятся между собою два капитала, изъ которыхъ одинъ, будучи отданъ въ ростъ по 4%, принесъ въ $9\frac{1}{2}$ мѣсяцевъ 63 рубля $33\frac{1}{3}$ коп., а другой, отданный по 5%, принесъ въ 11 мѣсяцевъ 137 руб. 50 коп.

86) Нѣкто далъ заимообразно своему пріятелю 4000 руб. на два мѣсяца, безъ всякихъ процентовъ. Пріятель, вмѣсто 2 мѣсяцевъ, продержалъ у себя капиталъ 25 мѣсяцевъ, и по прошествіи этого времени, взамѣнъ процентовъ за просроченное время, при возвратѣ капитала приложилъ еще 200 р. Спрашивается: больше ли получилъ бы заимодавецъ, еслибъ его капиталъ лежалъ въ банкѣ 23 мѣсяца по 4%?

87) Нѣкто перваго января занялъ, для одного торговаго предпріятія, 5000 рублей на 5 мѣсяцевъ, по $\frac{4}{5}$% въ мѣсяцъ; по прошествіи этого времени ему очистилось отъ торговли, за уплатою занятаго капитала вмѣстѣ съ процентами, 470 рублей; чрезъ 5 мѣсяцевъ онъ опять занялъ 10000 рублей на 7 остальныхъ мѣсяцевъ года, по $\frac{6}{7}$% въ мѣсяцъ, и къ концу года, по заплатѣ занятаго капитала съ процентами, выручилъ чистой прибыли 1500 рублей. Спрашивается: во-первыхъ, какой капиталъ должно имѣть въ банкѣ, чтобы по 4% получить такую же прибыль, считая и заплаченные проценты; во-вторыхъ, какой процентъ отъ занятыхъ капиталовъ составляетъ полученная имъ чистая прибыль, и въ-третьихъ, сколько процентовъ вообще приносили занятые капиталы?

88) Домъ, оцѣненный въ 5200 руб. сер., приноситъ ежегоднаго доходу 342 руб. $85^5/_7$ коп. сер., а на него ежегодно расходуется: 1) на ремонтъ 50 руб. сер., и 2) 65 руб. сер. на застрахованіе отъ огня. Спрашивается: какой процентъ приноситъ этотъ домъ?

89) Помѣщикъ долженъ капиталъ, который въ годъ приноситъ, считая по 5%, 275 руб. процентовъ. Не платя ни капитала, ни процентовъ цѣлый годъ, онъ предлагаетъ заимодавцу получить взамѣнъ долга хлѣбомъ, считая каждую четверть ржи въ 4 руб. $14^2/_7$ коп. Спрашивается: сколько по этому расчету пріидется заимодавцу получить ржи?

90) Найти общаго наибольшаго дѣлителя слѣдующихъ двухъ чиселъ: 1025 и 5050.

91) Сколько получить должно заслуженнаго жалованья за 7 мѣсяцевъ и 11 дней, съ вычетомъ по 2 копѣйки съ рубля, если третное жалованье составляетъ 133 руб. $33^1/_3$ коп. сер.?

92) Куплено масла 10 бочекъ; во всякихъ трехъ бочкахъ по 22 пуда, и съ каждыхъ четырехъ пудовъ положено на вывѣску дерева $^5/_7$ пуда, каждый же фунтъ чистаго масла стоитъ $37^1/_2$ коп. Сыскать, сколько было заплачено за все чистое масло?

93) Фрегатъ, который идетъ 10 миль въ часъ, видитъ за 18 миль впереди корабль, идущій по 8 миль въ часъ. Спрашивается: сколько пройдетъ фрегатъ, пока догонитъ корабль, и чрезъ какое время?

94) Нѣкто имѣетъ трехъ цѣнъ вино: бутылка перваго стоитъ 1 р. 76 коп., втораго 1 руб. 72 коп., и третьяго 1 руб. 60 коп. Онъ хочетъ смѣшать вмѣстѣ 48 бутылокъ и получить бутылку вина въ 1 р. 70 к. Спрашивается: сколько какого вина должно взять для смѣшенія?

95) Нѣкто, пришедъ въ гостиный дворъ, купилъ игрушекъ для дѣтей. За первую игрушку заплатилъ $^1/_9$ часть денегъ, которыя имѣлъ при себѣ; за другую $^3/_7$ остатка отъ покупки первой игрушки, за третью $^3/_5$ остатка отъ второй игрушки. По приходѣ домой, нашелъ остальныхъ въ кошелькѣ денегъ 1 руб. 92 коп. Требуется узнать, сколько было денегъ въ кошелькѣ и сколько за каждую игрушку заплачено.

96) Когда 18 человѣкъ въ $2^2/_3$ мѣсяца, работая ежедневно по 9 часовъ, вырыли каналъ длиною 150 саженъ, шириною $2^1/_2$ саж., глубиною $1^1/_3$ сажени, то въ какое время 50 человѣкъ, съ равнымъ прилежаніемъ, выроютъ каналъ, длиною 200 саженъ, шириною $2^3/_4$ сажени, а глубиною 2 сажени, работая ежедневно по 11 часовъ, если притомъ крѣпость грунта перваго канала относится къ крѣпости грунта втораго канала какъ 3 : 4?

97) Сколько на 1000 испанскихъ реаловъ можно получить русскихъ р сер., когда 1 піастръ = 20 реаламъ, а 7 піастровъ = 9,38 р. с.?

98) Что заплатилъ купецъ за 200 пудовъ товару, котораго каждый пудъ продалъ по 20 руб. $83^1/_2$ коп., имѣя убытку $4^1/_2$%?

99) Неизвѣстный капиталъ, отданный въ ростъ по $4^1/_2$%, принесъ въ $2^2/_3$ мѣсяца 5472 руб. 43,509 коп. процентовъ. Какъ великъ капиталъ?

§ 54. (заключительный).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ГЛАВНЫХЪ ПОНЯТІЙ, ВХОДЯЩИХЪ ВЪ АРИѲМЕТИКУ.

Все, что можетъ быть исчислено или измѣрено, увеличено или уменьшено, называется вообще *величиною*. Подъ это названіе подходятъ не только всѣ предметы, но и разныя ихъ группы или собранія, разсматриваемыя каждая отдѣльно, какъ особое цѣлое. Это такое же обширное понятіе, какъ слово «*существо*».

Значеніе всякой величины, т. е. какъ она велика или какъ она мала, мы познаемъ только *относительно*, по сравненію ея съ другой величиной, намъ уже извѣстною. Самъ по себѣ каждый предметъ не малъ и не великъ: онъ становится для насъ то тѣмъ, то другимъ собственно по отношенію его къ другимъ предметамъ. Мы говоримъ: «*этотъ домъ малъ*» лишь потому что въ насъ есть уже представленія о многихъ другихъ домахъ, которые гораздо болѣе этого дома.

Исчисляя величины, уже тѣмъ самымъ мы приводимъ ихъ *въ извѣстное взаимное отношеніе*. Но какъ вообще величины мыслимы для насъ по единственнымъ своимъ признакамъ, что «*онѣ могутъ быть исчислены или измѣрены*», и какъ всякое измѣреніе опредѣляется числомъ, то и очевидно, что *между величинами могутъ быть одни численныя отношенія*. Слѣдовательно и обратно: приводить величины въ опредѣленныя между собою отношенія значитъ *исчислять* ихъ.

Можно приводить въ опредѣленное отношеніе только величины однородныя. Такъ мы считаемъ: два дерева и два дерева — четыре дерева; восемь рублей безъ двухъ рублей — шесть рублей; дважды два дѣла — четыре дѣла; часъ составляетъ двадцать-четвертую долю сутокъ и проч. Если намъ приходится надобность исчислять предметы, принадлежащіе къ разнымъ родамъ, то сперва подводимъ ихъ подъ одинъ общій высшій родъ, или подъ одно высшее наименованіе, и потомъ считаемъ, но какъ уже предметы этого высшаго рода. Напримѣръ: все, что находится въ комнатѣ, хотя въ ней есть предметы разныхъ родовъ: стулья, шкафы, посуда, и проч., подводимъ сперва подъ одно общее наименованіе «*вещь*», а потомъ считаемъ такъ: одна вещь, двѣ вещи и т. д. Подобнымъ образомъ сравнивая величину огорода съ величиною пруда, въ немъ находящагося, величину пола съ величиною куска сукна, которымъ хотимъ обить этотъ полъ, кадку меду и рубли денегъ, на которые желаемъ промѣнять или продать медъ и проч., и здѣсь сравниваемъ только то, что однородно. За одно-

родность принимается во всѣхъ этихъ случаяхъ то именно свойство или качество предметовъ, по которому они и сравниваются между собою какъ величины. Такъ огородъ и прудъ сравниваемъ въ отношеніи ихъ протяженностей, что подлежитъ исчисленію; полъ и кусокъ сукна тоже; кадку меду и рубли денегъ въ отношеніи цѣны или стоимости вещей, что также исчисляется.

Всѣ однородныя величины имѣютъ одну общую мѣру, изъ которой онѣ составлены, такъ что одна изъ нихъ заключаетъ въ себѣ эту общую мѣру большее число разъ, а другая меньшее; но можетъ быть и такъ, что двѣ или болѣе величины заключаютъ ее въ себѣ одинаковое число разъ, и тогда онѣ равны между собою. Эта общая мѣра называется *единицею*. Когда мы знаемъ величину единицы какого-либо рода предметовъ, то понимаемъ и величины разныхъ группъ или собраній этихъ предметовъ, а потому и можемъ ихъ сравнивать между собою. Такъ, принимая одного человѣка за единицу рода человѣческаго, понимаемъ, во-первыхъ, какъ должны быть велики группы или собранія въ 50, 100, 1000 человѣкъ и т. д.; во-вторыхъ, что такое значитъ отношеніе 50-ти человѣкъ къ 100, 1000 человѣкъ и проч. Слѣдовательно *для каждаго роди предметовъ есть своя величина единицы*. Изъ повторенія единицъ или прикладыванія ихъ одной къ другой образуются числа, какъ изъ прибавленія одного предмета къ другому того же рода составляется весь этотъ родъ. Присовокупляя умственно человѣка къ человѣку, будемъ постепенно получать все большія и большія группы или собранія людей, пока, наконецъ, дойдемъ до числа 1.135.488.000, которое, по вычисленію Редена, конечно приблизительному, составляетъ итогъ всѣхъ людей, живущихъ теперь на землѣ. Это послѣднее число, представляя собою объемъ рода человѣческаго, выражаетъ отношеніе величины всего рода человѣческаго къ величинѣ единицы этого рода, т. е. къ одному человѣку. Такимъ образомъ понятно, что за единицу рода принимается каждый изъ предметовъ, образующихъ этотъ родъ. Впрочемъ, для сравненія однородныхъ величинъ, можно брать за мѣру и совершенно произвольную единицу. Такъ шагами я могу измѣрить длину и ширину двора, а чрезъ то опредѣлить и взаимное отношеніе между этими двумя протяженіями, т. е. показать чѣмъ длина двора (или во сколько разъ) болѣе или менѣе ширины его. Очевидно, что это отношеніе не перемѣнится, если, вмѣсто моего шага, я возьму произвольной длины палку, снуръ или что-либо подобное. Но, чтобъ произвольная единица могла быть понятною для всѣхъ и общеупотребительною, она непре-

мѣнно должна обратиться въ *постоянную*. Такъ именно и составились единицы или мѣры длины, вѣса, времени, вмѣстимости и проч. По-крайней-мѣрѣ онѣ остаются постоянными для одного какого-либо народа, или для всего отдѣльнаго государства, пока это государство не захочетъ ихъ измѣнить, какъ сдѣлалъ Конвентъ во Франціи, во времена первой республики, измѣнивъ всю прежнюю систему мѣръ въ новую, *метрическую*.

За мѣру какого-либо рода величинъ иногда принимаютъ и нѣсколько постоянныхъ единицъ, которыя однакожъ должны имѣть между собою опредѣленное отношеніе. Такъ у насъ въ Россіи вѣсъ предметовъ измѣряется различными постоянными единицами: берковцами, пудами, фунтами и проч. Когда мы говоримъ, что масса такого-то вещества вѣситъ 5 пудовъ, то здѣсь за единицу принимается *пудъ*. Но эту самую массу можно опредѣлить и числомъ 200 фунтовъ, и въ этомъ случаѣ за единицу берется *фунтъ*. Впрочемъ очевидно, что 5 пудовъ все равно, что 200 фунтовъ. Разница вся въ томъ, что въ первомъ выраженіи взята для измѣренія крупная единица, а во второмъ мелкая. Нѣсколько постоянныхъ единицъ, большихъ или меньшихъ по своей величинѣ, введены въ употребленіе для удобства избѣгать дроби въ вычисленіяхъ. Еслибъ не было фунта и другихъ еще меньшихъ единицъ для вѣса, тогда бы вѣсъ вещества, который меньше пуда, напр. 17 фунтовъ, нельзя бы было иначе выразить, какъ дробнымъ числомъ, здѣсь $^{17}/_{40}$ пуда.

Изъ сказаннаго понятно, что *число есть выраженіе опредѣленнаго отношенія величины къ однородной съ нею единицѣ*. Такъ число «*три пуда*» показываетъ опредѣленное отношеніе величины вѣса извѣстной массы вещества къ величинѣ вѣса, принятой за единицу. Вы говорите, что уступаете другому «*три четверти своего поля*». Здѣсь все ваше поле принимается за единицу, а число «*три четверти*» выражаетъ отношеніе уступаемой вами земли ко всему вашему полю. Вы купили «*полтора*» ведра вина; числомъ «*полтора*» опредѣляется отношеніе величины купленнаго вами вина къ величинѣ одного ведра, какъ извѣстной единицѣ.

Если каждымъ числомъ опредѣляется отношеніе между извѣстною величиною и ея единицею, то двумя, тремя и т. д. числами опредѣляются отношенія между двумя, тремя и т. д. однородными величинами. Это даетъ намъ возможность замѣнять величины числами и производить надъ послѣдними разныя выкладки, какъ бы производили ихъ надъ самыми величинами.

Числа обыкновенно раздѣляютъ на *отвлеченныя* и *именованныя.* Отвлеченнымъ числомъ выражается отношеніе между величиною и ея единицею безъ означенія притомъ къ какому роду предметовъ принадлежитъ эта величина; а если, при выраженіи отношенія, приводятся и самыя названія предметовъ, то число называется *именованнымъ.* Напримѣръ, говоря просто: *пять, десять, пятнадцать, сто* и проч. и не упоминая о томъ, что̀ именно означается этими числами, мы произносимъ отвлеченныя числа. Если же скажемъ: *пять человѣкъ, десять столовъ, пятнадцать кусковъ полотна, сто четвертей ржи* и проч., то это будутъ именованныя числа. Однакожъ въ Ариѳметикѣ подъ послѣднимъ именемъ обыкновенно разумѣютъ, въ противоположность отвлеченнымъ числамъ, только такія числа, которыя означаютъ вѣсъ, протяженіе, время, цѣну и вмѣстимость вещей, именно извѣстныя постоянныя мѣры въ государствѣ.

Примѣчаніе. Не нарушая логичности дѣленія, можно бы было послѣдній разрядъ чиселъ назвать *числами постоянныхъ мѣръ*, оставивъ вообще за именованными числами то значеніе, которое по самому ихъ названію имъ принадлежитъ.

Какъ бы ни были сложны и разнообразны выкладки надъ числами, отвлеченными и именованными, цѣлыми и дробными, если онѣ ариѳметическія, въ нихъ могутъ входить только четыре дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Сложность выкладокъ происходитъ не отъ новыхъ какихъ-либо дѣйствій, а отъ совокупленія и повторенія тѣхъ же дѣйствій, такъ что все искусство составлять ихъ состоитъ въ томъ, чтобы при сохраненіи ихъ непремѣннаго условія — точности, избѣгать лишнихъ дѣйствій и достигать требуемыхъ результатовъ по возможности кратчайшимъ путемъ. Говоримъ: по возможности, такъ какъ средства, заключающіяся въ четырехъ дѣйствіяхъ, дотого незначительны, что съ помощію ихъ мы не только не всегда достигаемъ результатовъ кратчайшимъ путемъ [1]), но и вовсе не въ состояніи опредѣлить нѣкоторыхъ

---

[1]) Представимъ себѣ, что на первую клѣтку шахматной доски, состоящей, какъ извѣстно, изъ 64 клѣтокъ, положено 1 зерно, на вторую вдвое болѣе, т. е. 2 зерна, на третью опять вдвое болѣе, т. е. 4 зерна, и такимъ образомъ на каждую слѣдующую клѣтку все вдвое болѣе противъ предъидущей, и теперь спросимъ: сколько будетъ положено зеренъ въ 64 клѣткахъ? Очевидно, что этотъ вопросъ кратчайшимъ путемъ въ Ариѳметикѣ разрѣшенъ быть не можетъ; ибо для полученія числа зеренъ послѣдней клѣтки надобно прежде повторить умноженіе на 2 шестьдесятъ три раза; а потомъ, для нахожденія суммы зеренъ, надобно взять шестьдесятъ четыре слагаемыя числа. Между тѣмъ Алгебра рѣшаетъ этотъ вопросъ и просто, и скоро.

выводовъ, которые представляетъ намъ все разнообразіе отношеній между величинами. *Наука исчисленія* (Алгебра) весьма обширна, и то, что излагается въ Ариѳметикѣ, составляетъ только ея часть, часть такъ-сказать исполнительную, удовлетворяющую болѣе простымъ, вседневнымъ потребностямъ нашего общественнаго быта.

Знаніе, которое объясняетъ порядокъ составленія всякихъ чиселъ, научаетъ выражать ихъ словами и немногими условными знаками (цифрами), замѣняющими для краткости слова, производить надъ числами, выраженными такими знаками, по возможности кратчайшимъ путемъ разныя выкладки, основанныя на четырехъ дѣйствіяхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ понятіе и о нѣкоторыхъ существенныхъ свойствахъ чиселъ, называется Ариѳметикою.

ОТВѢТЫ И РѢШЕНІЯ

на вопросы и задачи, изложенные въ §§: 4, 14, 16, 18, 21, 25, 26, 28, 32, 34. 36, 38, 39. 41, 43, 45, 47, 49, 52, 53.

ОТДѢЛЪ ПЕРВОЙ.

НАХОЖДЕНІЕ ДѢЛИТЕЛЕЙ.

§ 4.

1) Общій дѣлитель 5.

2) Общіе дѣлители: 2, 4, 8; наибольшій 8.

3) Общіе дѣлители: 2, 4, 8, 16; наибольшій 16.

4) на 2640.

5) Общій наибольшій дѣлитель 3.

6) Общіе дѣлители 2, 4, 11, 22, 44, 121, 242, 484.

7) Общій наибольшій дѣлитель 16.

8) На 9027.

9) Общихъ дѣлителей нѣтъ.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Простыя дроби.

СОКРАЩЕНІЕ ДРОБЕЙ.

§ 14.

1) $^{1}/_{3}$ 2) $^{1}/_{3}$ 3) $^{4}/_{9}$ 4) $^{7}/_{10}$

5) $^{41}/_{151}$ 6) $^{87}/_{115}$ 7) $^{328}/_{541}$ 8) Несокращаемая

8) $^{7}/_{24}$ 10) $^{8}/_{11}$ 11) $^{37}/_{67}$ 12) $^{67}/_{118}$

13) $^{189}/_{208}$ 14) $^{17}/_{21}$ 15) $^{74}/_{89}$ 16) $^{123}/_{140}$
17) $^{1024}/_{1345}$ 18) $^{106}/_{171}$ 19) $^{1227}/_{148}$ 20) $^{453}/_{617}$
21) $^{373}/_{920}$ 22) $^{147071}/_{486354}$ 23) $^{1927}/_{5417}$ 24) $^{49}/_{50}$
25) Несокращаемая 26) $^{7}/_{9}$ 27) $^{45}/_{62}$ 28) $^{37}/_{46}$
29) $^{4}/_{5}$ 30) $^{3}/_{5}$ 31) $^{2}/_{3}$ 32) $^{2}/_{3}$
33) $^{3}/_{5}$ 34) $^{7}/_{9}$ 35) $^{17}/_{19}$ 36) $^{17}/_{24}$

—

СЛОЖЕНІЕ ДРОБЕЙ.

§ 16.

1) $2^{21}/_{40}$ фунта.
2) $2^{1}/_{2}$.
3) $2^{2}/_{5}$ пуда.
4) $177^{11}/_{48}$ года.
5) $2^{1}/_{24}$ дести, или 2 дести 1 листъ.
6) $4^{5}/_{48}$ фунта.
7) $34^{26}/_{35}$ недѣли.
8) $5^{1}/_{40}$ фунта.
9) $2^{2027}/_{5280}$ гривны.
10) 26 мѣс. 5 дней $3^{3}/_{8}$ часа.
11) $30^{4}/_{15}$ рубля.
12) 29 фунт. на 24 р. $36^{109}/_{168}$ к.
13) $338^{7}/_{8}$ листа, или 14 дестей $2^{7}/_{8}$ листа.
14) $11610^{7}/_{8}$ золотника.
15) 11 пудовъ $14^{1}/_{2}$ фунта.
16) $532^{4}/_{21}$.
17) $14^{2}/_{3}$ фунта.
18) $68^{627}/_{1190}$.

—

ВЫЧИТАНІЕ ДРОБЕЙ.

§ 18.

1) $3^{5}/_{6}$.
2) $15^{4}/_{5}$ лота.
3) $^{1}/_{6}$.
4) $^{1}/_{24}$ пуда.
5) Изъ $^{3}/_{4}$ нельзя вычесть $^{8}/_{9}$, потому что вычитаемая дробь болѣе уменьшаемой; но если къ меньшей дроби $^{3}/_{4}$ прибавимъ дробь $^{5}/_{36}$ и вычтемъ потомъ большую дробь $^{8}/_{9}$, то въ остаткѣ выйдетъ нуль.
6) $^{11}/_{30}$ линіи.
7) 6 руб. $28^{11}/_{36}$ коп.
8) 11 четверт. $7^{1}/_{24}$ четверик.
9) $^{603}/_{1540}$.
10) $3^{5}/_{8}$ рубля.
11) $11^{16}/_{45}$.
12) $2^{20}/_{21}$ рубля.
13) 3 четверти $5^{35}/_{66}$ гарнца.
14) $^{4}/_{9}$ фунта.
15) $8^{1}/_{3}$ рубля.
16) $8^{4}/_{13}$ лота.
17) $382^{7}/_{12}$ рубля.
18) $36^{9}/_{14}$ минуты.
19) $9^{38}/_{45}$.
20) $14^{28}/_{33}$.
21) $16^{5}/_{12}$ фунта.
22) $^{29}/_{84}$.
23) $6^{46}/_{63}$.
24) $556^{889}/_{1224}$.
25) $^{13}/_{15}$.
26) $1^{14}/_{45}$.
27) $2^{9}/_{77}$.
28) $^{19}/_{30}$.
29) $1^{74}/_{165}$.
30) $1^{23}/_{52}$.

УМНОЖЕНІЕ ДРОБЕЙ.

§ 19.

1) 6 грошей.

2) $6^{3}/_{10}$.

3) 20.

4) 64 пуда $21^{1}/_{4}$ фунта.

5) 94 четверти 4 четверика $6^{6}/_{7}$ гарнца.

6) 56 пудовъ $1^{5}/_{11}$ фунта.

7) 7 руб. 70 коп.

8) $30^{5}/_{6}$.

9) 848 руб. $98^{2}/_{3}$ коп.

10) $^{25}/_{72}$ руб. или $34^{13}/_{18}$ коп.

11) $^{8}/_{15}$.

12) $^{11}/_{28}$.

13) $^{28}/_{45}$.

14) 20 фунтовъ $11^{1}/_{7}$ лота.

15) $^{12}/_{55}$.

16) $^{28}/_{85}$.

17) Задача неопредѣленная. Пусть первая дробь будетъ $^{4}/_{9}$, тогда вторая должна быть $^{16}/_{45}$.

18) $4^{17}/_{36}$.

19) $308^{6}/_{7}$.

20) $4^{24}/_{49}$.

21) $3^{11}/_{63}$.

22) $5^{1}/_{10}$.

23) $7^{1}/_{2}$.

24) $83^{1}/_{81}$.

25) $17^{1}/_{7}$.

26) 110 стопъ 18 дестей $1^{25}/_{44}$ листа.

27) $^{77}/_{117}$.

28) Задача неопредѣленная. Пусть третье число $^{3}/_{4}$, тогда второе будетъ $6^{15}/_{22}$, а первое $31^{65}/_{88}$.

29) 15 минутъ $45^{3}/_{4}$ секунды.

30) 5 четвертей 4 четверика $1^{5}/_{8}$ гарнца.

ДѢЛЕНІЕ ДРОБЕЙ.

§ 25.

1) $^{7}/_{31}$ раза.

2) $^{8}/_{59}$.

3) $^{12}/_{137}$.

4) $^{32}/_{219}$.

5) $^{6}/_{43}$.

6) 3 пуда $25^{19}/_{49}$ фунта.

7) $18^{13}/_{16}$.

8) $^{63}/_{1738}$ часа, или 2 минуты $10^{430}/_{869}$ секунды.

9) $^{16}/_{1573}$ берк. или 4 фун. $2^{310}/_{1573}$ лот.

10) $^{1}/_{9}$ рубля.

11) 19 руб. 20 коп.

12) 6 пуд. 25 фунт. 16 лот.

13) 12808 руб. 40 коп.

14) $^{9}/_{20}$ фунта.

15) $1^{10}/_{11}$.

16) $^{39}/_{40}$.

17) $^{32}/_{35}$.

18) $^{33}/_{80}$.

19) $10^{14}/_{45}$.

20) $^{27}/_{100}$ пуда.

21) $21^{103}/_{472}$ раза.

22) $^{497}/_{660}$.

23) 1 четв. 1 четв. $6^{1}/_{28}$ гарн.

24) $1^{41}/_{105}$.

25) $14^{85}/_{152}$.

26) $^{11}/_{45}$.

27) $^{22}/_{91}$.

28) $^{91}/_{495}$.

29) $1\frac{143}{207}$. 30) $12\frac{4}{7}$.
31) Большее $13\frac{25}{27}$, меньшее $1\frac{30}{27}$. 32) $11\frac{809}{1508}$ раза.
33) $14\frac{415}{721}$ раза. 34) $\frac{7}{9}$.

—

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КО ВСѢМЪ ЧЕТЫРЕМЪ ДѢЙСТВІЯМЪ НАДЪ ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ.

§ 26.

1) $359\frac{5}{6}$. 2) $55\frac{173}{1440}$.

3) Осталось 300 арш. $3\frac{5}{12}$ верш. на сумму 1726 руб. $22\frac{3}{4}$ коп. [1]).

4) Задача невозможная, потому что $\frac{1}{3}$ *болѣе* $\frac{1}{9}$ *только въ три раза*.

5) Четверть искомаго числа болѣе $\frac{1}{8}$ того же числа на *одну восьмую*; но, по условію задачи, эта четверть болѣе восьмой на $45\frac{1}{9}$, уменьшенныхъ въ $3\frac{1}{2}$ раза; т. е. на $12\frac{8}{9}$. Отсюда видно, что $12\frac{8}{9}$ замѣняютъ *восьмую* долю искомаго числа; а все число $=$ $8 \times 12\frac{8}{9} = 103\frac{1}{9}$.

6) $8\frac{23}{24}$.

7) Бо̀льшая дробь $\frac{385}{507}$, а меньшая $\frac{44}{507}$. Въ суммѣ искомыхъ дробей ($\frac{11}{13}$) должны заключаться и бо̀льшая и меньшая дроби; но какъ большая дробь, по условію задачи, въ $8\frac{3}{4}$ раза болѣе меньшей, то вмѣсто большей можно взять $8\frac{3}{4}$ раза меньшую дробь, и тогда въ суммѣ будетъ всего $9\frac{3}{4}$ раза меньшая дробь. Итакъ, раздѣливъ $\frac{11}{13}$ на $9\frac{3}{4}$, узнаемъ меньшую, которую если вычтемъ изъ суммы, то въ остаткѣ получимъ большую дробь.

8) На $\frac{11}{48}$ менѣе. 9) Въ $2\frac{2}{17}$ раза болѣе.

10) $\frac{61}{78}$.

11) Одинъ получитъ 4 четверти 3 четверика $1\frac{2}{7}$ гарнца, а другой 1 четверть 1 четверикъ $4\frac{5}{7}$ гарнца. Ибо такъ какъ одинъ заплатилъ за возъ муки въ $3\frac{2}{3}$ раза болѣе другаго, то второй долженъ взять одну долю, какихъ первый $3\frac{2}{3}$ доли. Итакъ если 5 четвертей $4\frac{3}{4}$ четверика *раздѣлить* на $4\frac{2}{3}$ равныхъ долей, то въ частномъ получится то число муки, которое слѣдуетъ второму.

12) $244\frac{2}{7}$. Половина и треть, или пять шестыхъ долей искомаго числа равны, по условію задачи, $203\frac{4}{7}$, значитъ, что шестая часть искомаго будетъ въ 5 разъ менѣе $203\frac{4}{7}$; а все число въ 6 разъ болѣе полученнаго отсюда частнаго.

13) $609\frac{3}{13}$. По условію задачи, $\frac{7}{9}$ и $\frac{1}{4}$ или $\frac{37}{36}$ неизвѣстнаго числа болѣе $\frac{2}{3}$ того же числа 220-ю; но $\frac{37}{36}$ болѣе $\frac{2}{3}$ на дробь $\frac{13}{36}$; слѣдовательно $\frac{13}{36}$ неизвѣстнаго числа равны 220. Итакъ, чтобы получить искомое, надобно 220 раздѣлить на $\frac{13}{36}$.

14) 2 саж. $5\frac{7}{20}$ фута. 15) 121 руб. $6\frac{11}{64}$ коп.

16) Въ $6\frac{223}{636}$ раза. 17) $14\frac{113}{168}$ дня.

---

[1]) Эта дробь вычислена по приближенію.

18) $2342^2/_5$.

19) Большая $= {}^{373}/_{352}$, а меньшая $= {}^{309}/_{352}$.

20) $16^9/_{28}$.

21) 24.

22) Дѣлимое равно $4690^{184}/_{189}$; частное $= 633^{173}/_{189}$.

23) $148^{7447}/_{8736}$.

24) 2-й получилъ 2430 рублей, 3-й—1389 р., а всѣ трое 5919 р.

25) $7^3/_5$ [1]).

26) $78^{1381}/_{4555}$.

27) 1001.

28) $^{121}/_{284}$. Если первая труба въ 9 часовъ наполняетъ водоемъ водою, то въ 1 часъ она наполнитъ $^1/_9$ водоема, вторая же труба въ 1 часъ наполнитъ $^1/_{13}$ его: значитъ обѣ вмѣстѣ $^{22}/_{117}$, а въ $2^3/_4$ часа $2^3/_4 \times {}^{22}/_{117}$.

39) Прасолъ имѣетъ 72 быка.

30) $1^{15782}/_{15925}$.

31) 36 рублей.

32) Задача неопредѣленная. Пусть вторая дробь $^2/_{101}$; тогда первая должна быть равна $^{15}/_{202}$, третья $^{17}/_{303}$, а четвертая $^{515}/_{606}$.

33) Въ $2^{40626}/_{125071}$ раза.

34) На $89^{61}/_{90}$ руб.

35) На каждаго по 1 четверти 2 четверика хлѣба и по 3 руб. 29 к. [2]) денегъ.

36) $^{19}/_{133}$. Если знаменатель въ 7 разъ болѣе числителя, то вмѣсто знаменателя можно взять семерпато числителя; поэтому въ данной суммѣ 152 числитель долженъ содержаться 8 разъ.

37) Въ $192^{36}/_{47}$ дня.

38) 18.134 руб. $79^{19}/_{24}$ коп. на уплату долговъ и 21.761 р. $75^3/_4$ коп. на покупку дома.

39) $11^{413}/_{3132}$ раза.

40) $4^{92}/_{133}$ раза.

41) Въ 5 лѣтъ 10 мѣсяцевъ.

42) $175^{115}/_{128}$ рубля.

43) Въ 44 часа.

44) 6020 рублей.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Десятичныя дроби.

СЧИСЛЕНІЕ И ИЗОБРАЖЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

§ 28.

1) 3,2

2) 2,7

3) 5,23

4) 1,73

5) 5,93

6) 11,128

7) 4,2815

8) 7,18312

9) 127,123456789

10) 0,8

11) 0,9

12) 0,21

13) 0,76

14) 0,99

---

[1]) Дробь $^3/_5$ приближенная величина.
[2]) Дроби отброшены.

15) 0,127
16) 0,529
17) 0,2475
18) 05,21673
19) 2,05
20) 3,01
21) 5,073
22) 2,095
23) 7,009
24) 5,0023
25) 3,00217
26) 0,00005
27) 1,000013
28) 7,000000007
29) 0,03
30) 0,0021
31) 0,00017
32) 0,000059
33) 0,0000000111
34) 0,0000000001

—

35) $4\,^{5}/_{10}$
36) $2\,^{9}/_{10}$
37) $3\,^{17}/_{100}$
38) $6\,^{74}/_{100}$
39) $2\,^{769}/_{110000}$
40) $^{3}/_{10}$
41) $^{12}/_{100}$
42) $^{314}/_{1000}$
43) $^{4817}/_{10000}$
44) $^{7134275}/_{10000000}$
45) $3\,^{1}/_{100}$
46) $4\,^{8}/_{100}$
47) $2\,^{25}/_{1000}$
48) $9\,^{7}/_{1000}$
49) $1\,^{1}/_{1000}$
50) $3\,^{926}/_{10000}$
51) $5\,^{8}/_{10000}$
52) $7\,^{29}/_{10000000}$
53) $^{52}/_{1000}$
54) $^{27}/_{1000}$
55) $^{9}/_{1000}$
56) $^{1}/_{1000}$
57) $^{25}/_{10000}$
58) $^{24}/_{10000}$
59) $^{1009}/_{10000000}$
60) $^{29000}/_{100000000}$
61) $^{7}/_{1000000000}$

—

СЛОЖЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

§ 32.

1) 5,9 рубля.
2) 26,2 коп.
3) 58,686.
4) 12,68.
5) 13,689.
6) 22,49 руб.
7) 6,37615.
8) 64,9607.
9) 12,34652.
10) 56,68.
11) 13,62.
12) 2,67.
13) 6,79.
14) 17,597.
15) 157,153.
16) 1291,9666.
17) 5410,7721
18) 2296,799748.
19) 19520,29601
20) 359,029.

21) Задача неопредѣленная, а потому можетъ быть множество рѣшеній. Напримѣръ, слѣдующія четыре дроби удовлетворяютъ вопросу: 0,03; 0,5671; 0,07; 0,32.

22) 12 фут. 7 дюйм. 7,9 лин.
23) 54 руб. 7,9 грив. или 54 руб. 79 коп.
24) 13 саж. 4 дюйм. 7,628 лин.
25) 22 пуда 29,5 фунта.

—

ВЫЧИТАНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

§ 33.

1) 1,1 фунта.
2) 7,1776 лин.
3) 1,0025.
4) 8 фут. 6 дюйм. 2,2 лин.
5) 2,303 руб.
6) 5,75 руб.
7) 9 руб. 69 коп

8) Австрійскій талеръ болѣе рубля на 28,25 коп., голландскій на 33,5 коп., а шведскій на 41,5 коп.; прусскій же талеръ менѣе рубля на 8,75 коп.

9) 0,02972 русск. фунта.
10) 9738,2 англ. фута.
11) 10,22346.
12) 0,22235 русск. сереб. руб.
13) 0,9476 русск. фута.
14) 1,33427.
15) 369,19 саж.

—

УМНОЖЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

§ 34.

1) 57,92.
2) 53,36087.
3) 21,00764721.
4) 8,61952.
5) 4145,4234189.
6) 0,127488.
7) 0,000029.
8) 0,00000002958.
9) 1526,625 руб.
10) 389,76 руб.
11) 30, 324 руб.
12) 35475,09 саж.
13) 0,00000004853851.
14) 77 пуд. 37,5375 фунта.
15) 2 сажени 2 фута 9 дюймовъ 9,1125 лин.
16) 0,187671.
17) 0,095 руб.
18) 8,461036 дюйм.
19) 294 Loofstelle.

—

ДѢЛЕНІЕ ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЕЙ.

§ 36.

2,4.
2) 1,88.
3) 0,257.
4) 0,141.
5) 0,012065.
6) 0,3084 руб.
7) 0,0108333 . . руб.
8) 0,666 . . руб.
9) 0,246 . . коп. сер.
10) 6,9558 версты.
11) 0,468699 . . русск. саж.
12) 5,25
13) 1.392269 . .
14) 0,87622 . .
15) 0.011042 . .
16) 3,24146 . .
17) 0,00015 . .
18) 1,7647 . .
19) 1,96767 . .
20) 2,16929 . .
21) 0,623007 . .
22) 3,62844 . .
23) 20 саж. 3 ф. 3 д. 7,103 лин.
24) 22,26259 фунта.

25) 4 руб. 96,242908 коп.
26) 1,3655 . .
27) 16,38 раза.
28) 3195,5 арпана.
29) 20,99 гектолитра.
30) 2134,606 метра.
31) 66,2879 англ. мили.
32) 399,64 франка.
33) 328,08 шилинга.
34) 50,2008 дублона.
35) 2,7 раза.
36) 96,523 червонца.
37) 0,009291.

—

38) 0,5.
39) 0,2.
40) 0,75.
41) 0,875.
42) 0,95.
43) 0,68.
44) 0,6875.
45) 0,75.
46) 0,344.
47) 0,84.
48) 0,575.
49) 0,4.
50) 0,6666.
51) 0,8333.
52) 0,567567.
53) 0,69496.
54) 0,50038 .
55) 0,6729..
56) 0,66954..
57) 0,035416.
58) 0,002965...
59) 0,0000023...

—

ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

§ 38.

1) Данная періодическая дробь имѣетъ своимъ предѣломъ *единицу*; т. е. 1, будучи представлена періодическою дробью, приметъ видъ: 0,9999.

2) $^{45}/_{99}$
3) $^{1325}/_{9999}$.
4) $^{353}/_{990}$
5) $^{308}/_{1665}$.

—

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ЧЕТЫРЕМЪ ДѢЙСТВІЯМЪ НАДЪ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ.

§ 39.

1) Платина въ 2,578 раза, золото въ 2,445 раза, ртуть въ 1,72 раза, свинецъ въ 1,439 раза, серебро въ 1,327 раза и мѣдь въ 1,125 раза тяжелѣе желѣза.

2) 0,5513.
3) 0,9257.
4) 0,64942 сажени.
5) 0,31104 пуда.
6) 601,85 австр. тал.
7) 0,000606.
8) 0,534.
9) 417 пуд. 20 ф. 1,85 зол.
10) 5,6517.
11) 0,01266 года.
12) Менѣе дробью 0,3456.
13) 1,75 кельн. марки.
14) 77029,5 руты.
15) 397 пуд. 12 ф. 27 золот. 80,5 долей.
16) 3 пуда 4 ф. 54 зол. 2,4 доли.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

§ 41.

1) $^{163}/_{557} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1 = {}^{1}/_{13}.}}}}}$

2) $^{401}/_{999} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+{}^{1}/_{2}.}}}}}}$

3) $^{1019}/_{2017} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{47+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10.}}}}}}$

4) $^{1693}/_{2039} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+{}^{1}/_{2}.}}}}}}}$

5) $^{178}/_{793}$.
6) $^{304}/_{683}$.
7) $^{835}/_{2617}$.
8) $^{1}/_{3}$, $^{7}/_{22}$, $^{8}/_{55}$, $^{23}/_{72}$.
9) $$^{587}/_{1943} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + {}^{1}/_{2}}}}}}}}.$$

Первыя четыре приближенныя величины этой дроби: $^{1}/_{3}$, $^{3}/_{10}$, $^{13}/_{43}$, $^{29}/_{96}$.

10) $$^{13957}/_{59476} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + {}^{1}/_{6}}}}}}}}}}.$$

Приближенныя величины этой дроби: $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{13}$, $^{4}/_{17}$, $^{19}/_{81}$, $^{23}/_{98}$, $^{65}/_{277}$, $^{88}/_{375}$, $^{1033}/_{4402}$, $^{2574}/_{9279}$.

11) $^{3}/_{1}$, $^{22}/_{7}$, $^{333}/_{106}$, $^{355}/_{113}$.
12) $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{10}/_{49}$.
13) 70 : 39.
14) 0,152 : 0,134531...

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРОСТОМУ ТРОЙНОМУ ПРАВИЛУ.

§ 43.

1) $^{1}/_{2}$ четверика или 4 гарнца.
2) 5 руб. $78^{1}/_{2}$ коп.
3) 6913 руб. 86 коп.
4) 4 руб. $19^{4}/_{9}$ коп.
5) 74,54.
6) 2275 пудовъ.

7) $269^{87}/_{90}$.
8) 5,519.
9) $25^{5}/_{18}$ мѣс.
10) 70 аршинъ.
11) 40 рублей.
12) 40 руб. $68^{3}/_{4}$ коп.
13) $199^{1}/_{2}$ дней.
14) 3 руб. $64^{7}/_{12}$ коп.
15) 1284 руб. $57^{1}/_{4}$ коп.
16) 3 мѣсяца.
17) $^{5}/_{24}$ рубл. или $20^{5}/_{6}$ коп.
18) $58^{43}/_{44}$ раза.
19) $^{9}/_{14}$ руб. или $64^{2}/_{7}$ коп.
20) 217 пуд. $5^{31}/_{125}$ фунта.

—

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ СЛОЖНОМУ ТРОЙНОМУ ПРАВИЛУ.

§ 45.

1) $58^{2}/_{3}$ аршина.
2) 1711 рубл. $36^{4}/_{11}$ коп.
3) 120 аршинъ.
4) 42 руб. $66^{1}/_{7}$ коп. [1])
5) 96 арш. $3^{7}/_{15}$ верш.
6) 61 четверть 2 четверика.
7) 42 руб. $44^{4}/_{19}$ коп.
8) 2340 руб. 74 коп.
9) 1 арш. $12^{1}/_{2}$ вершк.
10) 6 мѣсяц. $5^{1}/_{4}$ дня.
11) $44^{121}/_{126}$; т. е. около 45 паръ.
12) Около 27 человѣкъ.
13) Около 35 человѣкъ.
14) 28 дней 2 часа 40 мин.
15) $411^{13}/_{45}$ сажени.
16) $607^{211}/_{294}$ куб. сажени.
17) $4^{41}/_{46}$ дня.
18) 40 $^{24}/_{25}$ дня.

—

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРАВИЛУ ТОВАРИЩЕСТВА.

§ 47.

1) 1-й получилъ 29 п. $3^{1}/_{2}$ ф.
   2-й » 31 » 13 »
   3-й » 22 » 15 »
   4-й » 24 » $24^{1}/_{2}$ »

2) 1-му . . $34^{7}/_{71}$ четвер.
   2-му . . $26^{37}/_{71}$ »
   3-му . . $41^{48}/_{71}$ »
   4-му . . $37^{63}/_{71}$ »
   5-му . . $22^{52}/_{71}$ »
   6-му . . $106^{6}/_{71}$ »

3) А. . . $1204^{28}/_{93}$ руб.
   Б. . . $1144^{8}/_{93}$ »
   В. . . $451^{57}/_{93}$ »

4) 1-й . . $3153^{1}/_{3}$ руб.
   2-й . . $1576^{2}/_{3}$ »
   3-й . . $788^{1}/_{3}$ »
   4-й . . $3941^{2}/_{3}$ »

5) 1-я партія получила 360 руб. $93^{57}/_{131}$ коп.; 2-я партія 89 р. $37^{387}/_{917}$ коп.

6) На первую партію достанется 2022 $^{426}/_{867}$ руб.; на вторую $3114^{552}/_{867}$ руб.; на третью $707^{756}/_{867}$ руб. На каждаго человѣка первой партіи приходится около $40^{1}/_{2}$ руб.; на каждаго человѣка второй партіи около $37^{2}/_{10}$ руб., а на каждаго человѣка третьей партіи около $20^{3}/_{10}$ руб.

---

[1]) Дробь найдена по приближенію, какъ и во многихъ слѣдующихъ рѣшеніяхъ.

7) А. . . 6400 рублей.
Б. . . 3200 »
В. . . 2400 »

8) 1-я ком. пол. 73 р. $84^8/_{13}$ к.
2-я » » 110 » $76^{12}/_{13}$ »
3-я » » 138 » $46^2/_{13}$ »
4-я » » 153 » $84^8/_{13}$ »
5-я » » 153 » $84^8/_{13}$ »
6-я » » 169 » $23^1/_{13}$ »

9) А. . . 900 р. $10^5/_7$ коп.
Б. . . 720 » $8^4/_7$ »
В. . . 480 » $5^5/_7$ »

10) Первая часть 4136, вторая 4653, а третья 5170. Отношеніе между данными дробями приводится къ отношенію между слѣдующими цѣлыми числами: 8: 9: 10.

11) Одному 131 руб. $78^{38}/_{129}$ коп., другому 68 руб. $21^{91}/_{129}$ коп.

12) 63 человѣка.

13) 1-й получитъ 2000 рублей, 2-й — 4000 рублей, 3-й — 12000 рублей, 4-й — 18000 рублей.

14) А получилъ барыша $76^{12}/_{13}$ рубля, Б — $123^1/_{13}$ руб., а В въ общій торгъ положилъ 195 рублей. Если В изъ общаго барыша 275 руб. получилъ 75 рублей, то значитъ, что онъ положилъ въ торгъ $^3/_{11}$ доли всего вклада; потому что барыши соразмѣрны вкладамъ, а 75 руб. отъ 275 рублей, составляютъ $^3/_{11}$. Отсюда видно, что прочіе двое положили въ торгъ $^8/_{11}$ долей; но какъ они положили 520 руб., то изъ этого слѣдуетъ что $^1/_{11}$ доля вклада равняется 65 руб., а вкладъ $В=3\times65$ руб.

15) Дочь получила 1087 руб. 58 коп., сынъ получилъ 2175 руб. 16 к., а матери досталось 3262 руб. 74 коп.

16) Первому 282 руб., 84 коп., второму 254 руб. 55 коп., третьему 197 руб. 98,5 коп.

17) Первая 9, вторая 135, третья 180.

18) Первому 52 рубля 89 коп. [1], второму 82 руб. 28 коп., третьему 61 р. 71 коп., четвертому 74 р. 93 к., пятому 58 р. 77 к., шестому 29 р. 38 к.

19) Первому достанется изъ барыша $7885^5/_7$ руб.; второму $1057^1/_7$ р., третьему тоже $2057^1/_7$ руб.

20) Часть 1-го равна 413,72 руб., часть 2-го 744,69 руб., часть 3-го 541,59 руб.

21) Первый работалъ 42 дня, второй 28 дней, а третій 21 день. Такъ какъ работники получали неравную поденную плату, а между тѣмъ по окончаніи работы получили поровну денегъ, то это показываетъ, что число дней, проработанныхъ каждымъ соразмѣрно количеству получаемой имъ платы; т. е. кто больше получалъ, тотъ меньше дней работалъ. Слѣдовательно число 91 должно быть раздѣлено на три части, соотвѣтственно числамъ 80, 120 и 160.

22) Первый получилъ $446^{214}/_{541}$ рубля, второй $573^7/_{541}$ рубля, третій $480^{320}/_{541}$ руб.

23) Въ $8^8/_9$ часа. Если первый произведетъ работу въ 20 дней,

---

[1]) Дроби отброшены.

то это значитъ, что въ 1 часъ онъ произведетъ $^1/_{20}$ этой работы; такимъ же образомъ второй въ 1 часъ произведетъ $^1/_{16}$ всей работы; поэтому оба вмѣстѣ въ 1 часъ произведутъ $^9/_{80}$ данной работы. Но $^{80}/_{80} : {}^9/_{80} = 8^8/_9$.

24) 1-му . . $638^{29}/_{74}$ руб.
2-му . . $455^{315}/_{518}$ »
3-му . . $870^{545}/_{814}$ »
4-му . . $1228^3/_{77}$
Всѣмъ $3193^{69}/_{814}$ руб.

25) Бассейнъ никогда не наполнится водою, когда всѣ три трубы будутъ открыты.

26) Первый 1600 руб.
Второй $1142^6/_7$ »
Третій $1257^1/_7$ »

27) 1971 арш. 7 вершковъ.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРАВИЛУ СМѢШЕНІЯ.

§ 49.

1) $78^1/_2$ пробы.

2) По 1 руб. $12^{13}/_{29}$ коп.

3) По $71^4/_7$ коп.

4) 763,3 сажен.

5) Около 3 р. 15 коп.

6) На каждый фунтъ смѣси должно взять $^4/_7$ фунта того сорта, котораго фунтъ стоитъ 96 рублей, и $^3/_7$ ф. того, котораго фунтъ стоитъ 82 рубля. Такъ какъ отъ каждаго фунта высшаго сорта приходится убытку 6 рублей, а отъ низшаго прибыли 8 рублей, то высшаго сорта должно взять болѣе во столько разъ, во сколько 8 болѣе 6; т. е. другими словами: должно 1 раздѣлить на 2 части соотвѣтственно числамъ 8 и 6 или 4 и 3.

7) По 9,27 коп.

8) 4 фунта $49^1/_3$ золотника. Если въ каждомъ фунтѣ даннаго серебра находится по 85 золотниковъ чистаго серебра и по 11 золот. мѣди, то въ 25 фунтахъ будетъ

25×85 или 2125 золот. чистаго серебра,
25×11 или 275 золот. мѣди.

Когда на 72 золотника полагается мѣди 24 золот., то для узнанія сколько пойдетъ мѣди на 2125 золот., надобно 2125 умножить на 24 и произведеніе раздѣлить на 72. Полученное число $708^1/_3$ золотника должно уменьшить на 275 золотниковъ. Такимъ образомъ остатокъ $433^1/_3$ и будетъ означать то число золотниковъ мѣди, которое должно прибавить къ данному серебру, чтобы сдѣлать его 72-й пробы.

9) $37^{13}/_{23}$ золотника.

Въ слиткѣ всего 216 золотниковъ или $2^1/_4$ фунта, но какъ этотъ слитокъ 69-й пробы, то въ немъ $^{69}/_{96}$ частей или $155^1/_4$ золот. чистаго серебра и $^{27}/_{96}$ частей или $60^3/_4$ золот. мѣди. По прибавленіи къ этому слитку чистаго серебра, количество мѣди останется въ немъ прежнее, только мѣдь къ серебру будетъ въ иномъ отношеніи, именно какъ 23 : 73; потому что въ серебрѣ 73-й пробы

въ каждомъ фунтѣ заключается 23 золотника мѣди и 73 золот. чистаго серебра. Отсюда видно, что серебро новаго слитка во столько разъ будетъ болѣе мѣди ($60^3/_4$ золот.), во сколько разъ 74 болѣе 23; т. е.

$$x = \frac{60^3/_4 \times 73}{23} = \frac{243 \times 73}{23 \times 4} = 192^{75}/_{92} \text{ золот.}$$

Но въ первомъ слиткѣ было серебра $155^1/_4$ золот.

Значитъ нужно прибавить $35^{13}/_{23}$ золот.

10) 29 лотовъ перваго сорта, $43^1/_2$ лота втораго сорта и столько же третьяго.

Сравнивая высшую цѣну съ искомою, находимъ, что на каждый лотъ перваго сорта получается убытку 15 коп.; сравнивая же низшую цѣну съ искомою, получаемъ прибыли на каждый лотъ по 7 коп.; слѣдовательно если взять для смѣшенія 15 частей низшаго сорта, то высшаго нужно будетъ взять только 7 частей. Но какъ съ средняго сорта получается также прибыли 3 копѣйки, то если этого сорта возьмемъ 15 частей, то перваго сорта должно взять только 3 части. Итакъ на 15 частей третьяго сорта и на 15 втораго надобно взять только 10 частей перваго, $15+15+10=40$. Такимъ образомъ $3^5/_8$ фунта или 116 лотовъ должно раздѣлить въ отношеніи чиселъ: 15, 15 и 10. Очевидно, что такого рода задачи могутъ имѣть многія рѣшенія. Можно, напримѣръ сравнивать средній сортъ съ высшимъ и низшимъ. По условію задачи, отъ смѣшенія каждаго лота перваго сорта получается убытку 15 коп., а отъ смѣшенія средняго сорта прибыли 3 коп.; поэтому если перваго сорта взять 1 часть, то втораго должно будетъ взять 5 частей, потому что 15 втрое болѣе 3; а если втораго 5 частей, то низшаго должно будетъ взять во столько разъ болѣе, во сколько 7 болѣе 3. Отсюда узнаемъ, что данное число должно быть раздѣлено въ отношеніи чиселъ: 3, 5, 15.

Примѣчаніе. Чѣмъ больше сортовъ будетъ входить въ смѣшеніе, тѣмъ болѣе будетъ неопредѣленности, а потому и различныхъ рѣшеній; слѣдовательно *тѣмъ менѣе такія задачи должны входить въ* ***составъ Ариѳметики.***

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ИСЧИСЛЕНІЮ ПРОЦЕНТОВЪ.

§ 52.

1) 60 рублей.
2) $26^2/_3$ рубля.
3) 17.700 рублей.
4) 25 руб. $71^3/_7$ коп.
5) 666 руб. 66 коп.
6) 210 рублей.
7) 6858 рублей.
8) 208 руб. 50 коп.
9) $139^1/_6$ рублей.
10) 10.563 рубля.
11) $13^1/_3$ процента.
12) 18.400 рублей.

13) 5428 рублей.
14) 148 руб. 76 коп.
15) 13537 руб. 95,39 коп.
16) 720 экземпляровъ.
17) 35522 руб. $72^8/_{11}$ коп.
18) 4747,4 рубля.
19) 6,39 процента.
20) 390 руб. 15 коп.
21) 3632 рубля.
22) Такой же капиталъ 500 р.
23) 375 рублей.
24) 14,625 процентовъ.
25) 121 руб. 66 коп.
26) 299 руб. 6 коп.
27) 5632 руб. 98 коп.
28) Чрезъ 17,65 года или чрезъ 17 лѣтъ и около 8 мѣсяц.
29) Чрезъ 9 лѣтъ.

30) 8219,29 руб. Чтобы рѣшить эту задачу, надобно предположить, что какой нибудь опредѣленный капиталъ, например, 100 рублей, внесенъ въ банкъ, и вычислить на сколько возрастетъ этотъ капиталъ въ теченіе пяти лѣтъ. Мы знаемъ, что капиталъ въ 100 рублей, по 4% и считая проценты на проценты, возрастетъ до 121,665 рубля. Итакъ искомый капиталъ долженъ быть во столько разъ болѣе 100 руб., во сколько 1000 руб. болѣе 121,665 рубля. Отсюда

$$x = \frac{1000000}{121,665} = 8219,29 \text{ рубля.}$$

31) 1473 руб. $23^1/_{13}$ коп.
32) 4 процента.
33) 2275 рублей.
34) 2295 руб. 55 коп.
35) 8159 руб. 16,4 коп.
36) 81700 рублей.
37) 4976 руб. 2 коп.

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КО ВСѢМЪ ПРАВИЛАМЪ АРИѲМЕТИКИ.

§ 53.

1) Экономка издержала на припасы 11 рублей 6 копѣекъ; слѣдовательно менѣе, предназначеннаго на 1 руб. 77 коп.

2) Около 1671 человѣка на квадратную милю.

3) Въ $7^{19}/_{32}$ дня или въ 7 дней $14^1/_4$ часовъ.

4)

На столъ	250	руб.		
» платье	166	»	$66^2/_3$	коп.
» удовольствія	125	»	—	»
» прислугу	111	»	$11^1/_9$	»
» разныя другія надобности	100	»	—	»
Всего	752	руб.	$77^7/_9$	коп.

У него остается 247 руб. $22^2/_9$ коп.

5)

Старшему	228.571	руб.	$42^6/_7$	коп.
Второму	180.952	»	$38^2/_{21}$	»
Третьему	171.428	»	$57^3/_{21}$	»
Четвертому	152.380	»	$95^5/_{21}$	»

Пятому . . . . 142.857 руб. $14^2/_7$ коп.
Шестому . . . . 123.809 » $52^8/_{21}$ »

6) 359 рубля. 7) $2^{35}/_{216}$.
8) 7347 фунтовъ. 9) 33 берк. 8 пуд. 17 фунт. $26^{73}/_{84}$ золот.
10) Въ 2.300.279,1 руб. сер. 11) 897 руб. 19 коп.
12) 7 фунт. $1^4/_{11}$ лота. 13) 2354 руб. 50 коп.
14) 1523 рубля 9 коп. 15) $^{32691}/_4$ фунта.
16) 61.875 руб. 17) 69 берк. 1 п. $21^{113}/_{250}$ ф.
18) $^8/_9$ прежней порціи. 19) 62 руб. 50 коп.
20) Въ 11 мѣс. и около 26 дней. 21) $65^{19}/_{52}$ лота.
22) 73 года 5 дней. 23) 241 рубль $2^2/_5$ коп.
24) $2^{209}/_{360}$. 25) 12756 пуд. 29 ф. 7,06 лот.
26) $498^3/_4$ версты.

По условію задачи, сначала было приказано полку прибыть къ мѣсту назначенія въ 19 дней, а потомъ, по измѣненному приказанію, чрезъ 15 дней, т. е. 4-мя сутками ранѣе. Для исполненія приказанія полкъ проходитъ ежедневно 7-ю верстами болѣе прежняго маршрута, слѣдовательно въ 15 дней 7×15 или 105 верстъ болѣе. Эти 105 верстъ полкъ прошелъ бы въ 4 дня, еслибъ слѣдовалъ первому приказанію; поэтому въ каждый день онъ проходилъ бы $^{105}/_4$ версты или $26^1/_4$ версты. Итакъ полкъ долженъ всего перейти $26^1/_4+19=498^3/_4$ версты.

27) 24 милліона руб. сереб. 28) 27 саж. 6 фут. 10,846 дюйма.
29) 95 пудовъ. 30) Сумма = 2,439914.
разность = 2,398086.
произвед. = 0,050590966.
частное = 115,65.
31) 1610 руб. 24,82 коп. 32) а. $^{21}/_{40}$ б. $^7/_{13}$.
33) $^1/_{20}$, $^2/_{41}$, $^{15}/_{307}$. 34) $5.715.431^6/_7$.
35) 146 руб. $28^1/_8$ коп. 36) 22 арш. $13^5/_7$ верш.
37) А получилъ $524^{68}/_{143}$ руб.
Б » $4248^{36}/_{143}$ »
В » $2727^{39}/_{143}$ »

38) Первый проѣдетъ 252 версты, а другой 243 версты.

Если первый проѣзжаетъ въ каждые 5 часовъ 60 верстъ, то значитъ, что онъ въ часъ проѣзжаетъ 12 верстъ, а потому до отправленія другаго, ѣдущаго къ нему на встрѣчу, проѣдетъ 36 верстъ. Поэтому обоимъ надобно проѣхать всего 459 верстъ. Такъ какъ первый проѣзжаетъ въ часъ 12 верстъ, а второй $13^1/_2$, то, для узнанія сколько проѣдетъ каждый, должно раздѣлить число 459 въ отношеніи чиселъ 12 и $13^1/_2$.

39) 13-го апрѣля 1840 года, въ 10 минутъ пятаго часа пополудни. 40) $16^7/_{12}$ рубля.

41) 7877 рубл. $47^5/_7$ коп. сер. 42) 64085 руб. $33^1/_2$ коп. асс.

43) Единица. Всякое число тогда только въ произведеніи будетъ равняться самому себѣ, когда оно умножается на единицу;

но, по заданію, неизвѣстное число, будучи умножено само на себя, даетъ въ произведеніи то же самое неизвѣстное: слѣдовательно это число есть единица.

44) 20. Пятую часть неизвѣстнаго числа надобно помножить на 5, чтобы получить цѣлое неизвѣстное; по условію же задачи, для полученія неизвѣстнаго числа его надобно умножить на $^1/_4$ того же числа; значитъ, что $^1/_4$ неизвѣстнаго числа есть 5, а потому все неизвѣстное число равно 20.

45) $2567^{13}/_{61}$. Сказано, что если къ $^3/_4 + ^1/_9$ неизвѣстнаго числа или $^{31}/_{36}$ его прибавить 870, то получится $^6/_5$ того же неизвѣстнаго числа; отсюда видно, что число 870 равняется $^6/_5$ неизвѣстнаго числа безъ $^{31}/_{36}$ его; т. е. $^{61}/_{180}$ неизвѣстнаго. Итакъ $^{61}/_{180}$ неизвѣстнаго $= 870$; полное же неизвѣстное $= \frac{870 \times 180}{61} = 2567^{13}/_{61}$.

46) Искомыя числа суть: 243, 216, 189 и 162.

Изъ данныхъ отношеній видно, что если въ первомъ числѣ положить 9 частей неизвѣстной суммы всѣхъ четырехъ чиселъ, то во второмъ числѣ будетъ такихъ частей 8, въ третьемъ 7, а въ четвертомъ 6; слѣдовательно во всей неизвѣстной суммѣ будетъ 30 такихъ частей. Но въ задачѣ сказано, что сумма среднихъ чиселъ $=$ 405; поэтому если 405 раздѣлить на 15, т. е. на сумму долей, причитающихся отъ всей суммы на среднія числа, то получимъ величину каждой доли $405 : 15 = 27$. Такимъ образомъ первое число $=$ 9×27, второе 8×27, третье 7×27, четвертое 6×27.

47) Первый заплатилъ 3562 руб. $39^{61}/_{81}$ коп.
Второй » 1865 » $1^{113}/_{162}$ »
Третій » 1362 » $9^{17}/_{162}$ »

48) 0,3818181 . . . .
49) 618 руб. $37^1/_2$ коп.
50) 17,8 фунта.
51) $449^2/_3$ червонца.

Изъ условій задачи выводятся слѣдующія равенства.

1 рубль $= ^{95}/_2$ штив.
1 штив. $= ^1/_{20}$ гульд.
1 гульд. $= ^2/_5$ ефимка.
1 ефим. $= ^{142}/_{100}$ талера.
1 тал. $= ^1/_3$ червонца.

Отсюда $x = \frac{1000 \times 95 \times 2 \times 142}{2 \times 20 \times 5 \times 100 \times 3} = \frac{19 \times 71}{3} = 449^2/_3$ черв.

52) Слуга прогулялъ $94^1/_2$ дня, работавъ всего $40^1/_2$ дня. Число 135 дней ($=4$ мѣс. 15 дн.) надобно раздѣлить въ отношеніи чиселъ 40 и $17^1/_7$ или 280 и 120, что равно 400. Но какъ слуга за каждый прогульный день терялъ менѣе, нежели сколько выигрывалъ въ каждый рабочій день, то изъ 400 долей числа 135 дней 180 долей приходится на прогульные дни, а 120 долей на рабочіе.

53) 455, 104 и 65. По условію задачи, третье число въ 7 разъ менѣе перваго; отсюда видно, что оба эти числа вмѣстѣ равны $^8/_7$

долямъ перваго; второе же число составляетъ отъ этой суммы *пятую* часть; т. е. оно равно $^8/_{35}$ долямъ перваго же числа. Итакъ вмѣсто всѣхъ трехъ чиселъ можно взять $^8/_7 + ^8/_{35}$ долей перваго, или $^{48}/_{35}$ долей его. Если $^{48}/_{35}$ долей перваго $= 624$, то первое $= \frac{624 \times 35}{48} = 455$. Третье равно $^{455}/_7 = 65$, а второе $\frac{455 \times 8}{35} = 104$.

54) Большее = 66,455; меньшее = 13,291.

По заданію $^2/_5$ большаго числа должно прибавить къ меньшему, чтобъ оба числа сдѣлались равными между собою; изъ этого очевидно что меньшее число равно *пятой* доли большаго, или все тоже, большее число равно *пятерному* меньшему.

55) 2,1436333 . . . .

56) Отцу 36 лѣтъ, а сыну 4 года. Чрезъ прибавленіе къ лѣтамъ отца, которыя сначала были *вдевятеро* болѣе лѣтъ сына, числа 12, отецъ дѣлается только *втрое* старѣе сына, т. е. девятикратное число уменьшается до троекратнаго. Это показываетъ, что въ числѣ 12 содержится троекратное число лѣтъ сына.

57) Большее число = 2,0957; меньшее = 1,6957.

58) 127 руб. $2^6/_7$ коп.

59) 0,37 рубля.

60) 12103 руб. ассигн.

61) $3^4/_7$ рубля.

62) Неизвѣстное число есть 2.

63) За каждую сажень березовыхъ дровъ заплачено по 7 рублей, а за каждую сажень сосновыхъ по 5 рублей 60 копѣекъ. Разность въ количествѣ дровъ, купленныхъ въ оба раза, составляетъ 10 саженъ сосновыхъ дровъ, а разность въ цѣнѣ обѣихъ покупокъ 56 рублей, слѣдовательно 10 саженъ сосновыхъ дровъ стоятъ 56 руб. Остальное очевидно.

64) Первый издержалъ 35 руб., второй 40 руб., третій 55 руб. 50 к.

Первый со вторымъ издержали 75 руб., а первый съ третьимъ 90 руб. 50 коп., поэтому третій издержалъ болѣе втораго 15 руб. 50 коп. Но издержка втораго съ издержкою третьяго составляютъ 95 руб. 50 к., а какъ третій издержалъ болѣе втораго 15-ю руб. 50 коп., то по вычитаніи 15 руб. 50 коп. изъ 90 руб. 50 коп., получимъ въ остаткѣ 80, т. е. вдвое болѣе того, что издержалъ второй.

65) $28^4/_7$ часа.

66) Въ $58^{22}/_{41}$ часа.

67) 8,9 сутокъ.

68) $25^1/_2$ коп.

69) 100 билліоновъ копѣекъ. Чтобы сосчитать эту сумму, еслибъ она вся состояла изъ копѣечныхъ монетъ, для этого надобно было бы употребить 1.522.070 лѣтъ 5 сутокъ 13 часовъ и 20 минутъ, не дѣлая въ счетѣ никакихъ остановокъ.

70) Большее число = 80; меньшее = 8.

71) Купецъ имѣетъ 1150 четвертей хлѣба, а домъ стоитъ 4200 руб.

Разность между остатками = 782 рублямъ, а разность въ цѣнахъ = 68 копѣйкамъ; поэтому если купецъ будетъ продавать хлѣбъ

68 копѣйками дешевле, то онъ выручитъ 782 рублями менѣе. Отсюда ясно, что сколько разъ 68 коп. содержится въ 782 рубляхъ или 78200 коп., столько у купца четвертей хлѣба.

72) Большее = 28,63544; меньшее = 25,05601.

Если $^1/_8$ перваго = $^1/_7$ втораго, то семерное первое число равно восьмерному, второму, или первое = $^8/_7$ втораго. Но если отъ $^8/_7$ втораго (взявъ это число вмѣсто перваго (отнять второе, то выйдетъ въ остаткѣ $^1/_7$ втораго, которое, по заданію, = 3,57943.

73) Неизвѣстное число = 801.

Изъ условій вопроса видно, что $^1/_9$ доля неизвѣстнаго числа, сложенныя съ цѣлымъ неизвѣстнымъ числомъ, — что составляетъ всего $^{10}/_9$ неизвѣстнаго, да еще 9, равны 899; поэтому $^{10}/_9$ неизвѣстнаго числа безъ 9 единицъ составляютъ 890, а $^1/_9$ = 89. Итакъ цѣлое неизвѣстное число = 801.

74) 2 руб. $83^{11}/_{15}$ коп.

75) 28 лѣтъ 4 мѣс. 7 дней.

76) 1250 рублей.

77) 22 руб. $97^3/_5$ коп.

78) $^1/_{4939}$.

79) 0,0585.

80) $37^{19}/_{29}$.

81) 131.466.888 футовъ.

82)

Цѣна сахару	92.278	руб.	65	коп. асс.
Консульскихъ процентовъ . . .	1.845	»	57	» »
Наемъ амбара	491	»	59	» »
Разныхъ расходовъ при отправленіи.	600	»	—	» »
Курташныхъ	461	»	39	» »
За коммиссію	4.613	»	93	» »
Всего	100.291	руб.	13	коп. асс.

83) Большее число = $8^{241}/_{246}$; меньшее = $1^6/_{41}$.

По второму условію задачи, большее число въ $7^5/_6$ раза болѣе меньшаго; слѣдовательно разность между большимъ и меньшимъ, равная $7^5/_6$, все тоже, что разность между меньшимъ и тѣмъ же меньшимъ, взятымъ $7^5/_6$ раза; т. е $6^5/_6$ раза взятое меньшее число = $7^5/_6$; отсюда меньшее = $7^5/_6 : 6^5/_6 = 1^6/_{41}$.

84) Постройка церкви Св. Петра въ Римѣ стоила 63.459.864 р.
» » Св. Павла въ Лондонѣ » 4.626.802 » 56 к.

Разность 58.833.061 р. 44 к.

85) Какъ 2 : 3.

86) Заимодавецъ получилъ бы въ банкѣ 112 рублями 53 копѣйками болѣе прибыли.

87) 1. Для полученія годовой прибыли 2770 рублей, надобно положить въ банкъ капиталъ въ 69.250 рублей.

2. Чистая прибыль отъ перваго капитала составляла 9,4%, а отъ втораго 15%.

3. Первый капиталъ принесъ $13^2/_3$%, а второй 21%.

88) 4,38%.

89) 1393 куля $7^{11}/_{29}$ четверика.

90) Общій наибольш. дѣлит. 25.

91) 240 руб. 64,4 коп.

92) 903 руб. $57^1/_7$ коп.

93) Фрегатъ догонитъ корабль чрезъ 9 часовъ, на разстояніи отъ мѣста отправленія 90 миль.

94) $17^{1}/_{7}$ бутылки одного сорта, столько же другаго и $13^{5}/_{7}$ бутылки третьяго сорта.

95) У него было съ собою денегъ 9 руб. 45 коп.

Онъ заплатилъ за	первую	игрушку	1	руб.	5	коп.
»	вторую	»	3	»	60	»
»	третью	»	2	»	88	»

96) Въ 2 мѣсяца $9^{3}/_{25}$ дня.

97) 67 руб. сереб.

98) 4354 руб. $51^{1}/_{2}$ коп.

99) 547.243 руб. 51 коп.

Таблица 1.

│	│	│	│	│	│	│	│	│	│
││	││	││	││	││	││	││	││	││	││
│││	│││	│││	│││	│││	│││	│││	│││	│││	│││
││││	││││	││││	││││	││││	││││	││││	││││	││││	││││
│││││	│││││	│││││	│││││	│││││	│││││	│││││	│││││	│││││	│││││
││││││	││││││	││││││	││││││	││││││	││││││	││││││	││││││	││││││	││││││
│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││	│││││││
││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││	││││││││
│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││	│││││││││
││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││	││││││││││

Таблица 2.

Таблица 3.